# 6 Constructibilitat

## 6.1 Regla i compàs

**Definició 6.1.** Una CONSTRUCCIÓ amb regla i compàs és una sèrie ordenada de CONSTRUCCIONS ELEMENTALS, que són:

I) Traçar la recta que passa per dos punts donats diferents.

II) Traçar una circumferència donats el centre i un altre punt diferent.

III) Escollir un punt del plà Euclidià, d'una figura o de la intersecció entre figures, si existeix.

**Definició 6.2.** Direm que una figura geomètrica $\mathcal{F}$ és CONSTRUÏBLE AMB REGLA I COMPÀS a partir d'un conjunt de punts inicial $\mathcal{P}$ si i només si existeix una construcció amb regla i compàs en la que es tracen tots els punts de $\mathcal{F}$.

**Proposició 6.3.** Donat un conjunt de punts, $\mathcal{P}_n$, podem traçar:

- Totes les rectes per punts de $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{F}_1 = \{r = AB \mid A, B \in \mathcal{P}_n\}$.
- Totes les circumferències amb centre a $\mathcal{P}_n$ i que passen per un punt de $\mathcal{P}_n$. $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{C}_{O,A} \mid O, A \in \mathcal{P}_n\}$.
- Totes les interseccions de les figures anteriors,

$$\mathcal{P}_{n+1} = \{A \in \gamma_1 \wedge \gamma_2 \mid \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2,\ \gamma_1 \neq \gamma_2\}.$$

**Definició 6.4.** Donat un conjunt de punts $\mathcal{P}_0$, el CONJUNT DE PUNTS GENERAT a partir de $\mathcal{P}_0$ és:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i,$$

on $\mathcal{P}_{n+1}$ és el conjunt de punts que podem traçar amb $\mathcal{P}_n$ com a la proposició anterior.

**Proposició 6.5.** El conjunt de punts generat per $\mathcal{P}_0$ és construïble a partir de $\mathcal{P}_0$.

## 6.2 Constructibilitat

**Definició 6.6.** El conjunt de NOMBRES CONSTRUÏBLES $\mathcal{K}$ és el conjunt de tots els nombres que es poden obtenir amb la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i l'arrel quadrada. Més formalment:

· $1 \in \mathcal{K}$.

· $\forall k_1, k_2 \in \mathcal{K}$, aleshores $k_1 + k_2 \in \mathcal{K}$, i també $k_1 \cdot k_2 \in \mathcal{K}$.

· $\forall k \in \mathcal{K}$, aleshores $-k \in \mathcal{K}$; Si $k \neq 0$, també $k^{-1} \in \mathcal{K}$; Si $k \geqslant 0$, també $\sqrt{k} \in \mathcal{K}$.

**Definició 6.7.** Donat un conjunt de punts, $\mathcal{P}$, direm que és un CONJUNT DE PUNTS ESTABLE si i només si:

$$\forall A, B \in \mathcal{P},\ \overline{AB} \in \mathcal{K}.$$

**Proposició 6.8.** Donats tres punts $A, B, C \in \Pi$, les condicions següents són equivalents:

(i) $\{A, B, C\}$ és un conjunt estable.

(ii) $\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{BC} \in \mathcal{K}$.

(iii) $\overline{AB},\ \overline{AC},\ [ABC] \in \mathcal{K}$.

(iv) $\overline{AB},\ \overline{AC},\ \cos(\angle A) \in \mathcal{K}$.

(v) $\overline{AB},\ \cos(\angle A),\ \cos(\angle B) \in \mathcal{K}$.

**Proposició 6.9.** Considerem un conjunt de punts estables, $\mathcal{P}$, dos punts del mateix, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, i un altre punt, $A \in \Pi$. Aleshores, si $\{P_1, P_2, A\}$ és estable, el conjunt $\mathcal{P} \cup \{A\}$ també és estable.

**Teorema 6.10.** Considerem un conjunt de punts estables $\mathcal{P}_0$. Aleshores, el conjunt de punts que genera, $\mathcal{P}$, també és estable. És a dir,

$$\forall A, B \in \mathcal{P}_0,\ \overline{AB} \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall A', B' \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i,\ \overline{A'B'} \in \mathcal{K}$$

**Corol·lari 6.11.** Amb regla, compàs i els dos extrems d'un segment de longitud 1, podem construir:

· segments de longitud coneguda igual a $\ell$ si i només si $\ell \in \mathcal{K}$, i

· angles de magnitud coneguda igual a $\alpha$ si i només si $\cos\alpha \in \mathcal{K}$.

**Corol·lari 6.12.**

i) Quadratura del cercle: Donat un cercle, trobar un quadrat de la mateixa àrea. (Equivalent a construir $\pi$, però $\pi \notin \mathcal{K}$.)

ii) Duplicació del cub. Donada l'aresta d'un cub, trobar l'aresta d'un cub amb el doble de volum. (Equivalent a construir $\sqrt[3]{2}$, que implica resoldre $x^3 - 2 = 0$, així que $\sqrt[3]{2} \notin \mathcal{K}$.)

iii) Trisecció de l'angle. Donat un angle $\alpha$, trobar l'angle $\alpha/3$. (Com que $\cos(\alpha) = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3)$, implica resoldre $3x^3 - 3x - \cos(\alpha) = 0$.)