4 Transformacions del pla

Definició 4.1. Una TRANSFORMACIÓ DEL PLA, t, és una bijecció del pla en ell mateix, $t : \Pi \to \Pi$.

Denotam el conjunt de transformacions del pla com $T = \{t : \Pi \to \Pi \mid t \text{ és una transformació}\}$.

Proposició 4.2.
- La composició de transformacions del pla és una transformació del pla.
- La inversa d'una transformació del pla existeix i és una transformació del pla.
- La identitat és una transformació del pla.

Definició 4.3. Donada una transformació t, direm que:
- el punt P ÉS FIX per t si $t(P) = P$;
- la figura geomètrica $\mathcal{F}$ ÉS FIXA per t si $\forall P \in \mathcal{F}$, $t(P) = P$;
- la figura geomètrica $\mathcal{F}$ ÉS INVARIANT per t si $t(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

4.1 Transformacions isomètriques

Definició 4.4. Una ISOMETRIA és una transformació del pla $m : \Pi \to \Pi$ tal que $d(A, B) = d(m(A), m(B))$ per dos punts A, B qualssevol.

Denotam el conjunt d'isometries com $E = \{m \in T \mid m \text{ és una isometria}\}$.

Proposició 4.5.
- La composició d'isometries és una isometria del pla.
- La inversa d'una isometria existeix i és una isometria.
- La identitat és una isometria del pla.

Proposició 4.6. Una isometria conserva la magnitud dels angles en valor absolut. O bé manté tots els angles, o bé els inverteix tots.

Corol·lari 4.7. Una isometria transforma punts colineals en punts colineals.

Definició 4.8. Una isometria és DIRECTA si manté el signe dels angles (equivalentment, direm que manté la orientació). Altrament, direm que és una transformació OPOSADA.

Denotam el conjunt d'isometries directes com $E^+ = \{m \in E \mid m \text{ és directa}\}$.

Denotam el conjunt d'isometries oposades com $E^- = \{m \in E \mid m \text{ és oposada}\}$.

Definició 4.9. Donada una recta r, denotarem la REFLEXIÓ per r com $R_r : \Pi \to \Pi$.

Donats un punt O i un angle α, denotarem el GIR de centre O i angle α com $G_{O,\alpha} : \Pi \to \Pi$.

Donats dos punts A, B, denotarem la TRANSLACIÓ per A i B com $T_{A,B} : \Pi \to \Pi$.

Proposició 4.10. Les reflexions, les rotacions i les translacions són isometries.

Proposició 4.11. Les isometries transformen figures $\mathcal{F}$ en figures $\mathcal{F}'$ congruents.

Proposició 4.12. Si dues isometries coincideixen en 3 punts no colineals, aleshores són iguals.

4.2 El Grup d'Isometries

Definició 4.13. Un grup, $(G, \cdot)$, és un conjunt G i una aplicació $\cdot$ tals que:
- l'operació és tancada, $\forall a, b \in G,\ a \cdot b \in G$; i
- l'operació és associativa, $\forall a, b, c \in G,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; i
- existeix un element neutre, $\exists \mathbb{1} \in G$ tal que $\forall a \in G,\ a \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot a = a$; i
- existeix l'invers de cada element, $\forall a \in G,\ \exists a^{-1}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \mathbb{1}$.

Definició 4.14. Un GRUP COMMUTATIU és un grup $(G, \cdot)$ tal que $\forall a, b \in G,\ a \cdot b = b \cdot a$.

Definició 4.15. Un SUBGRUP d'un grup $(G, \cdot)$, és un grup amb la mateixa operació, $(H, \cdot)$, tal que $H \subset G$.

Proposició 4.16. Sigui $(G, \cdot)$ un grup i H un subconjunt de G tal que $\forall h_1, h_2 \in H$,
- $h_1 \cdot h_2 \in H$, i
- $h_1^{-1} \in H$.

Aleshores, $(H, \cdot)$ és un subgrup de $(G, \cdot)$.

Proposició 4.17. Les isometries formen un grup amb la operació *composició*, que anomenarem el grup d'isometries $(E, \circ)$.

Proposició 4.18. Les isometries directes són un subgrup de $(E, \circ)$.

Proposició 4.19. Sigui $\mathcal{F}$ una figura geomètrica. Totes les isometries que deixen $\mathcal{F}$ invariant formen un subgrup de $(E, \circ)$.

4.3 Classificació de les isometries

Definició 4.20. Una REFLEXIÓ AMB LLISCAMENT és la composició d'una reflexió per una recta r i d'una translació per un segment paral·lel a r.

Teorema 4.21. Tota isometria es pot descompondre com la composició de com a màxim 3 reflexions.

Proposició 4.22. Les isometries directes són:
- La identitat.
- Les traslacions.
- Les rotacions.

Proposició 4.23. Les isometries oposades són:
- Les reflexions.
- Les reflexions amb lliscament.

4.4 Transformacions conformes

Definició 4.24. Una CORBA γ és una aplicació $\gamma : [0,1] \to \Pi$ continua, que defineix una figura geomètrica $\gamma([0,1])$.

Definició 4.25. Una TRANSFORMACIÓ CONFORME és una transformació $m : \Pi \to \Pi$ que manté l'angle amb el que es tallen dues corbes (en valor absolut i signe).

Una TRANSFORMACIÓ ANTI-CONFORME és una transformació $m : \Pi \to \Pi$ que inverteix l'angle amb el que es tallen dues corbes.

Proposició 4.26. Sigui t una transformació. Aleshores,

$$\begin{array}{l} t \text{ manté els} \\ \text{angles} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t \text{ manté l'angle amb el} \\ \text{que es tallen dues rectes} \end{array} \iff t \text{ és conforme,}$$

$$\begin{array}{l} t \text{ inverteix els} \\ \text{angles} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t \text{ inverteix l'angle amb el} \\ \text{que es tallen dues rectes} \end{array} \iff t \text{ és anti-conforme.}$$

Corol·lari 4.27.
- Les isometries directes són transformacions conformes.
- Les isometries oposades són transformacions anti-conformes.

Definició 4.28. Donats un punt C i un escalar $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, denotarem una HOMOTÈCIA de centre C i raó k com $h_{C,k} : \Pi \to \Pi$.

Proposició 4.29. Una homotècia de raó k transforma:
- una recta en una recta paral·lela; i
- un segment de longitud d en un segment de longitud $|k| \cdot d$; i
- una circumferència de radi r en una circumferència de radi $|k| \cdot r$.

Proposició 4.30. Les homotècies són transformacions conformes.

Definició 4.31. El PLA INVERSIU, Π^*, és el pla Euclidià extés amb un punt extra, ∞, que pertany a totes les rectes.

$$\Pi^* = \Pi \cup \{\infty\}$$

Definició 4.32. Un CICLE és una circumferència o una recta.

Proposició 4.33. Al pla inversiu, tres punts qualssevol determinen unívocament un cicle.

Definició 4.34. Donada una circumferència $\mathcal{C}$ de centre O i radi r, la INVERSIÓ per $\mathcal{C}$ és una aplicació $i_{O,r^2} : \Pi^* \to \Pi^*$ que envia cada punt P al punt P' tal que:
- P' està a la semirecta OP, i
- $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

En particular, $i_{O,r^2}(\infty) = O$ i $i_{O,r^2}(O) = \infty$.

Proposició 4.35. La inversió és una transformació involutiva de Π^*.

Indicació. Involutiva vol dir que coincideix amb la seva pròpia inversa.

Proposició 4.36. Considerem tres punts $O, P, Q \in \Pi^*$ diferents i la inversió i_{O,r^2}. Aleshores, $\triangle OPQ \cong \triangle OQ'P'$.

Proposició 4.37. La inversió i_{O,r^2} transforma cicles en cicles. En particular, transforma:

– una recta que passa per O en ella mateixa;
– una recta que no passa per O en una circumferència que passa per O;
– una circumferència que passa per O en una recta que no passa per O; i
– una circumferència que no passa per O en una circumferència que no passa per O.

Proposició 4.38. Les inversions són transformacions anti-conformes.