3 Propietats dels Triangles

3.1 Teoremes trigonomètrics

Teorema 3.1. Donat un triangle $\triangle ABC$ en que $A = 90°$, aleshores $a^2 = b^2 + c^2$.

Definició 3.2. Considerem un punt fix P d'una circumferència $\mathcal{C}$ de radi 1. Per a tot angle α, considerem el punt $A \in \mathcal{C}$ tal que $\angle POA = \alpha$ i el punt H que sigui el peu de l'altura de A sobre la recta OP. Aleshores,

- El SINUS de α, $\sin \alpha$, és igual a $\overline{AH}$ si $\alpha \in [0°, 180°]$, i $-\overline{AH}$ altrament.
- El COSINUS de α, $\cos \alpha$, és igual a $\overline{OH}$ si $\alpha \in [-90°, 90°]$ i $-\overline{OH}$ altrament.
- La TANGENT de α, $\tan \alpha$, és igual a $\sin \alpha / \cos \alpha$.

Proposició 3.3. El sinus, el cosinus i la tangent d'un angle α estan ben definits.

Proposició 3.4. Tenim que:

- $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$.
- $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$.
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$.

Teorema 3.5. En un triangle $\triangle ABC$, amb circumradi R,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Teorema 3.6. En un triangle $\triangle ABC$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

3.2 Punts notables

3.2.1 Circumcentre

Proposició 3.7. Donat un triangle $\triangle ABC$, les mediatrius dels tres costats són concurrents a un punt O, que anomenarem CIRCUMCENTRE.

3.2.2 Incentre

Proposició 3.8. Donat un triangle $\triangle ABC$, les bisectrius interios dels tres angles són concurrents a un punt I, que anomenarem INCENTRE.

3.2.3 Ortocentre

Definició 3.9. Donat un triangle $\triangle ABC$, la seva altura respecte un vèrtex A, h_A, és la recta que passa pel vèrtex i és perpendicular al costat oposat.

Proposició 3.10. Donat un triangle $\triangle ABC$, les seves altures són concurrents a un punt H, que anomenarem ORTOCENTRE.

Proposició 3.11. Donat un triangle $\triangle ABC$, el seu circumcentre O i el seu ortocentre H, $\overline{AH} = 2\overline{OA'}$, on A' és el punt mig del costat BC.

3.2.4 Baricentre

Definició 3.12. Donat un triangle $\triangle ABC$, la seva mediana respecte d'un vèrtex A, m_A, és la recta que passa pel vèrtex i pel punt mig del costat oposat.

Proposició 3.13. Donat un triangle $\triangle ABC$, les seves medianes són concurrents a un punt G, que anomenarem BARICENTRE.

Definició 3.14. El CENTROIDE o CENTRE GEOMÈTRIC d'una figura geomètrica $\mathcal{F}$ és el punt P que es troba en la "posició mitjana" de tots els punts de la figura.

3.3 Àrea del triangle

Proposició 3.15. L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és $[ABC] = rs$

Proposició 3.16. L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és $[ABC] = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Proposició 3.17. L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és $[ABC] = \frac{abc}{4R}$

Proposició 3.18. L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és $[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

3.4 Els teoremes de Ceva i de Menelau

Definició 3.19. Donats tres punts alineats, A, B, C, amb $A \neq B$, definim la seva RAÒ, $\left[\frac{AP}{PB}\right]$, com:

$$\left[\frac{AP}{PB}\right] = \begin{cases} +\overline{AP}/\overline{PB}, & \text{si } B \text{ està al segment } AC, \\ -\overline{AP}/\overline{PB}, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Proposició 3.20. Donats dos punts A, B i un $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, aleshores existeix un únic punt P a la recta AB tal que $k = \left[\frac{AP}{PB}\right]$.

Definició 3.21. Donat un triangle $\triangle ABC$, una CEVIANA és qualsevol recta que passa per només un vèrtex i talla el costat oposat (extés).

Teorema 3.22. Considerem un triangle $\triangle ABC$ i tres cevianes que passen per un vèrtex i tallen el costat oposat en, respectivament, A', B', C'. Aleshores, les tres cevianes són concurrents o paral·leles si i només si:

$$\left[\frac{AC'}{C'B}\right] \cdot \left[\frac{BA'}{A'C}\right] \cdot \left[\frac{CB'}{B'A}\right] = +1.$$

Teorema 3.23. Considerem un triangle $\triangle ABC$ i un punt de cada costat (extés) que no sigui un vèrtex, A', B', C'. Aleshores, els tres punts són colineals si i només si:

$$\left[\frac{AC'}{C'B}\right] \cdot \left[\frac{BA'}{A'C}\right] \cdot \left[\frac{CB'}{B'A}\right] = -1.$$