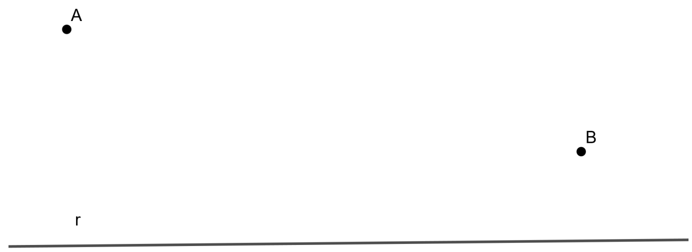
4 Transformacions del pla

Exercici 4.1. Troba quatre isometries diferents que tenguin, respectivament, 0, 1, 2 i 3 punts fixos.

Exercici 4.2. Sigui r una recta, i A, B dos punts del mateix semipla, com a la figura. Troba la distància més curta de A fins B passant per un punt de r.



Exercici 4.3. Donat un punt fix O, l'aplicació $a : \Pi \mapsto \Pi$ deixa fix O i transforma qualsevol altre punt P en el punt P' que es troba a la semirecta OP i tal que $\overline{OP'} = \overline{OP} + 1$. És a una isometria? És $a \circ a$ una transformació del pla?

Exercici 4.4. L'objectiu d'aquest exercici és demostrar que una isometria o bé manté tots els angles, o bé els inverteix tots. Ho veurem de manera guiada. Considerem una recta AB, dos punts P, Q i una isometria m.

(a) Demostra que m manté els angles en valor absolut.

(b) Demostra que m manté les rectes i els segments.

(c) Demostra que la recta AB i el segment PQ es tallen si i només si la recta $A'B'$ talla el segment $P'Q'$.

(d) Demostra que $\angle PAB = +\angle P'A'B'$ si i només si $\angle QAB = +\angle Q'A'B'$.

(e) Finalment, demostra m preserva la magnitud d'un angle (en valor absolut i signe) $\angle PAB$, si i només si preserva la magnitud de qualsevol altre angle $\angle XYZ$.

Indicació. Per resoldre el darrer apartat, aplicau una isometria n tal que $n(Y) = A$ i $n(YZ) = AB$.

Exercici 4.5. Troba una isometria m i una figura geomètrica $\mathcal{F}$ tal que $m(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, però $\mathcal{F} \not\subset m(\mathcal{F})$.

Exercici 4.6. Troba totes les isometries que deixen invariants un quadrat. Quantes n'hi ha?

Indicació. Que una transformació t deixi invariant una figura $\mathcal{F}$ vol dir que la imatge de la figura, $t(\mathcal{F})$, és la pròpia figura, $\mathcal{F}$. És a dir, que $t(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. No vol dir que tots els punts de la figura siguin fixos.

Exercici 4.7. Considerem una figura $\mathcal{F}$ formada per una recta r i un punt $P \notin r$.

(a) Demostra que qualsevol isometria que deixa invariant $\mathcal{F}$, deixa fix el punt P.

(b) Troba totes les isometries que deixen invariants $\mathcal{F}$.

Exercici 4.8. Demostra que un triangle és isòsceles si i només si té un eix de simetria.

Indicació. Un eix de simetria d'una figura geomètrica és una recta r que divideix en dues subfigures, tals que una és la reflexió de l'altra per r.

Exercici 4.9. Demostra que $(E, \circ)$ no és un grup commutatiu.

Indicació. Un grup $(G, \cdot)$ és commutatiu si $\forall a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$.

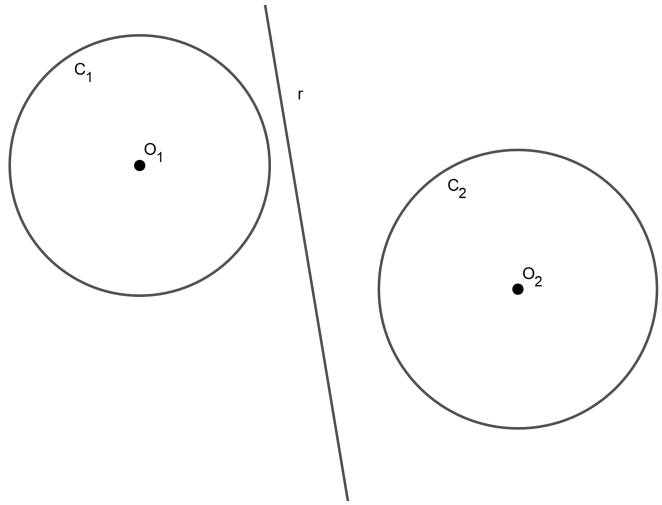
Exercici 4.10. Considerem un punt del plà fixat, O. Es damana:

(a) Demostra que el conjunt de rotacions amb centre O és un subgrup de $(E, \circ)$.

(b) Demostra que el conjunt de reflexions per rectes que passen per O no és un subgrup de $(E, \circ)$.

Exercici 4.11. Donada una recta r, troba dues isometries que deixen invariant la recta r, una directa i una inversa.

Exercici 4.12. Considerem dues circumferències i una recta com a la figura. Troba un quadrat regular amb un vèrtex en cada circumferència i dos vèrtex a la recta. Quants n'hi ha?



Exercici 4.13. Considerem un triangle equilàter $\triangle ABC$, i considerem per cada vèrtex un gir de $60°$. Estudia quina transformació del pla és la composició dels tres girs.

Indicació. Sempre consideram que l'angle de rotació d'un gir té sentit antihorari.

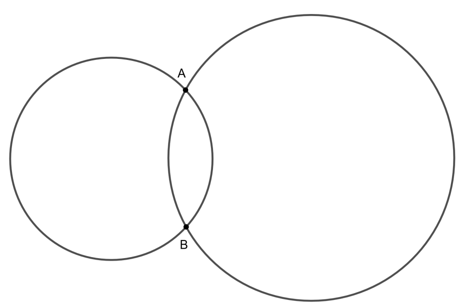
Exercici 4.14. Construeix un trapezi donades les longituds de les seves bases i les seves diagonals.

Indicació. Un trapezi és un quadrilàter amb dos costats paral·lels, anomenats bases.

Indicació. Cerca una transformació que, a partir del trapezi desconegut, et generi una figura geomètrica que sigui més fàcil de construir.

Exercici 4.15. Considerem dos punts A, B d'una circumferència $\mathcal{C}$ de radi r, tals que $\overline{AB} = r$. Per a un punt variable $C \in \mathcal{C}$, trobeu el lloc geomètric dels punts D tals que $ABCD$ és un paral·lelogram.

Exercici 4.16. Considerem dues circumferències $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ secants en A, B, amb $r_1 = 2r_2$, com a la figura. Trobeu una recta per A diferent a l'eix radical AB que determini cordes congruents.



Exercici 4.17. Sigui m una isometria involutiva. Demostra que m té un punt fix.

Indicació. Una transformació t és involutiva quan és igual a la seva inversa. Equivalentment, quan $t \circ t = \mathrm{id}$.

Exercici 4.18. Considerem dos segments congruents, $AB \equiv CD$. Demostra que existeixen exactament dues isometries m tals que $m(A) = C$ i $m(B) = D$.

Exercici 4.19. Donat un quadrilàter, estudia en quins casos existeix una homotècia que transforma el quadrilàter en un quadrat de costat 1.

Indicació. "Estudia", en aquest context, vol dir que trobis una condició necessària i suficient per assegurar que existeix alguna homotècia que cumpleix l'enunciat.

Exercici 4.20.

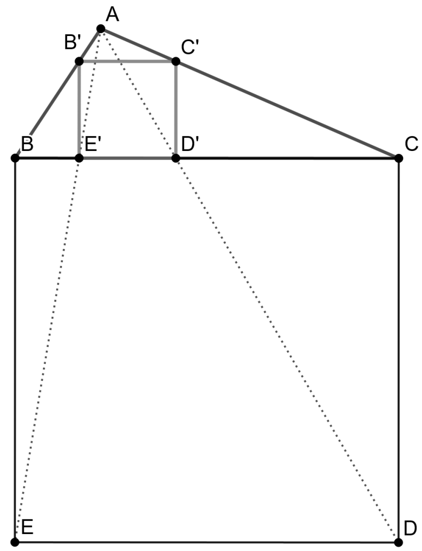
(a) Estudia si existeix alguna transformació conforme que no és isometria.

(b) Estudia si exteix alguna isometria que no és una transformació conforme.

Exercici 4.21. Donat un triangle $\triangle ABC$, construim un quadrat de costat BC exterior al triangle, $BCDE$. Construim els punts B', C', D', E' com a la figura.

(a) Troba el centre i la raó d'una homotècia que ens transforma $BCDE$ en $B'C'D'E'$, i demostra que $B'C'D'E'$ és un quadrat.

(b) Expressa la raó de la homotècia en funció només de la longitud dels costats de $\triangle ABC$.



Exercici 4.22. Suigui t una transformació que preserva els angles (en magnitud i valor absolut), i $\mathcal{C}_1$ una circumferència.

(a) Demostra que t transforma $\mathcal{C}_1$ en una altra circumferència, $\mathcal{C}_2$.

(b) Demostra que t transforma diàmetres de $\mathcal{C}_1$ en diàmetres de $\mathcal{C}_2$.

(c) Demostra que t transforma el centre de $\mathcal{C}_1$ en el centre de $\mathcal{C}_2$.

Indicació. Un diàmetre és un segment. No és suficient fer les demostracions per als extrems, sinó també per als punts interiors.

Exercici 4.23. Sigui h una homotècia de centre O i raó k.

(a) Demostra que h preserva els angles en magnitud i valor absolut.

(b) Demostra que h transforma una circumferència de radi r en una altra circumferència de radi $|k| \cdot r$.

Indicació. Per resoldre el primer apartat, considera el cas en que $k > 0$ i el cas en que $k < 0$.

Exercici 4.24. Donades dues circumferències $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ diferents, trobeu totes les homotècies que transformen la primera en la segona.

Indicació. Considereu el casos en que els radis són iguals i en que són diferents.

Exercici 4.25. Estudia si les inversions són isometries del plà inversiu. En particular, són isometries directes?

Exercici 4.26. Considerem la inversió respecte la circumferència $\mathcal{C}_1$. Traça (al dibuix, indicant les mesures) les següents figures geomètriques:

(a) La inversió del punt F.

(b) La inversió de la circumferència $\mathcal{C}_2$.

(c) La inversió de la recta r.

(d) La inversió del triangle $\triangle ABC$.

(e) La inversió de la inversió de la recta r.