

3 Propietats dels triangles

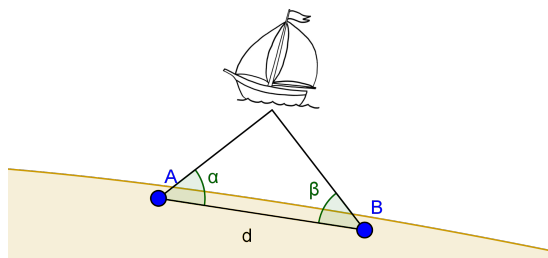
Exercici 3.1. Trobeu el sinus, el cosinus i la tangent dels angles de 30° , 45° i 60° . Demostreu-ho a partir de teoremes coneguts.

Exercici 3.2. Considerem el quadrat $ABCD$ de costat $2\sqrt{5}$. Siguin M_1, M_2 els punts mitjans de AB i BC , i sigui U la intersecció de les rectes CM_1 i DM_2 . Demostreu que el triangle $\triangle DUM_1$ és rectangle i té els costats iguals a 3, 4 i 5.

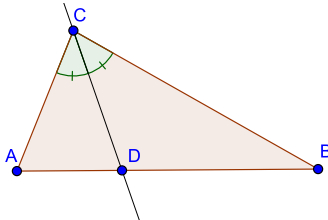
Exercici 3.3.

- Demostreu que l'únic nombre positiu $a \in \mathbb{R}$ que compleix $a^2 = a + 1$ és la raó àuria $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Considerem ara un triangle rectangle $\triangle ABC$ amb els costats en progressió geomètrica i amb el costat més petit $\overline{AB} = 1$. Calculeu el perímetre.

Exercici 3.4. Volem mesurar la distància d'un vaixell a la costa. Per a fer-ho, des de dos punts A i B de la costa, separats una distància $d = \overline{AB}$, mesuram els angles α, β de la figura. A quina distància es troba el vaixell?



Exercici 3.5. A la figura, on CD és una bisectriu del triangle $\triangle ABC$, demostreu que $AC/AD = CB/BD$. Aquest resultat es coneix com el teorema de la bisectriu.



Indicació. Feu servir el Teorema del sinus.

Exercici 3.6. Proveu l'invers del teorema de la bisectriu de l'exercici anterior. És a dir, sigui P un

punt del costat AB d'un triangle $\triangle ABC$. Proveu que si $PA \cdot CB = PB \cdot CA$, aleshores P pertany a la bisectriu de l'angle $\angle ACB$.

Exercici 3.7. Donats els triangles $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$, demostreu els següents criteris de **semblança** de triangles:

- Criteri Acc (i.e. $\angle A_1 = \angle A_2, \overline{A_1B_1}/\overline{A_2B_2} = \overline{B_1C_1}/\overline{B_2C_2}$), amb angle comú de 90° o més.
- Criteri ccc (i.e. $\overline{A_1B_1}/\overline{A_2B_2} = \overline{A_1C_1}/\overline{A_2C_2} = \overline{B_1C_1}/\overline{B_2C_2}$).
- Criteri cAc (i.e. $\angle A_1 = \angle A_2, \overline{A_1B_1}/\overline{A_2B_2} = \overline{A_1C_1}/\overline{A_2C_2}$).

Exercici 3.8. Demostreu que el circumcentre d'un triangle obtusangle (i.e, amb un angle de més de 90°) es troba fora del triangle.

Exercici 3.9. Sigui $\triangle ABC$ un triangle, i siguin A', B', C' els punts mitjans dels costats BC, AC, AB respectivament. Demostreu que:

- Els segments $A'B', B'C', A'C'$ divideixen el triangle original en quatre triangles congruents.
- El baricentre de $\triangle ABC$ coincideix amb el de $\triangle A'B'C'$.

Exercici 3.10. Demostreu que:

- Les medianes divideixen un triangle en 6 triangles d'igual àrea.
- El baricentre divideix les medianes en dos segments, les longituds dels quals es troben en raó de 1:2.
- La distància d'una mediana als dos vèrtexs pels que no passa és igual.

Exercici 3.11. Sigui $\triangle ABC$ un triangle. Si el costat AB és més gran que el costat BC , determineu si les seves medianes interiors (i.e. el segment de mediana que queda dins del triangle) segueixen la mateixa relació, la relació inversa o si no segueixen cap relació necessàriament.

Indicació. Centreu-vos en dos costats i les seves medianes corresponents, i mireu quins triangles podem trobar.

Indicació. Feu servir el teorema del cosinus.

Exercici 3.12. Si un triangle té dues medianes interiors congruents (i.e. són segments de la mateixa longitud), aleshores el triangle és isòscles.

Exercici 3.13. Proveu que el centroide d'un triangle $\triangle ABC$ és l'únic punt X del seu interior que el divideix en tres triangles d'igual àrea, és a dir, tal que $[ABX] = [BCX] = [CAX]$.

Exercici 3.14. Determineu els triangles tals que l'altura i la mediana concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en tres parts iguals.

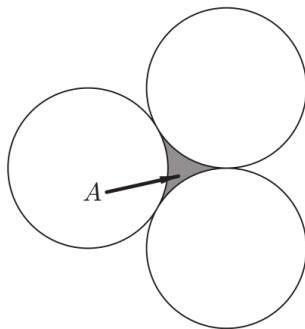
Exercici 3.15. Donat un triangle $\triangle ABC$, trobau l'àrea en funció de:

- a) Dos costats i l'angle del vèrtex comú (Cas **CAC**).
- b) Un costat i els angles adjacents (Cas **ACA**).
- c) Dos costats i l'angle d'un vèrtex diferent al vèrtex comú (Cas **CCA**).

Indicació. Per al darrer apartat, podeu fer servir que: $\sin C = \sin A + B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

Exercici 3.16. Trobeu l'àrea d'un polígon regular de n costats en funció de la longitud del seu costat. Comproveu la fórmula pels casos coneguts, $n \in \{3, 4\}$.

Exercici 3.17. Tres circumferències de radi r són tangents dues a dues, tal com mostra la figura. Quina és l'àrea de la regió A en funció de r ?



Exercici 3.18. Trobeu el radi de la circumferència circumscrita en funció dels costats d'un triangle.

Exercici 3.19. Considerem un triangle $\triangle ABC$ i un punt P interior al triangle o d'algun costat (sense estendre). Demostreu que $[ABP] \leq [ABC]$.

Exercici 3.20. Demostreu que dues cevianes que es tallen a l'interior d'un triangle no són paral·leles.

Exercici 3.21. Utilitzant el teorema de Ceva, demostreu que:

- (a) Les tres medians són concurrents.
- (b) Les tres bisectrius interiors són concurrents.
- (c) Les tres altures són concurrents.

Exercici 3.22. Considerem la circumferència circumscrita, \mathcal{C} , d'un triangle $\triangle ABC$. Considerem un punt P de la circumferència. Demostreu que els peus de les altures de P sobre els costats del triangle (extesos) són tres punts colineals. Aquest fet es coneix com el teorema de Simson.

Exercici 3.23. Trobeu el valor de la distància d a la figura.

