

1 Introducció a la geometria sintètica

1.1 Coneixements Previs

Definició 1.1. El PLÀ EUCLIDIÀ, Π , és el conjunt de punts bidimensional i infinit amb el que treballem, equipat amb una distància.

La DISTÀNCIA, $d : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, és una funció que a cada dos punts del plà Euclidià, els assigna la distància Euclídea (física) que els separa.

Definició 1.2. Una FIGURA GEOMÈTRICA és un subconjunt de punts del plà Euclidià.

L'ÀREA d'una figura geomètrica \mathcal{F} és la quantitat que mesura l'extensió planar recuberta per la figura.

La DISTÀNCIA ENTRE DUES FIGURES GEOMÈTRIQUES $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ és la distància mínima entre un punt $P_1 \in \mathcal{F}_1$ i un punt $P_2 \in \mathcal{F}_2$.

Definició 1.3. Un POLÍGON és una figura geomètrica formada per una sèrie de segments units pels extrems que acaba i comença al mateix punt.

Classificació. Els polígons es poden classificar segons:

- regular *vs* irregular.
- convex *vs* còncav.
- simple *vs* no simple.

Definició 1.4. Donats tres punts A, B, C diferents,

- l'ANGLE que formen és la regió del pla compresa entre les semirectes BA i BC en sentit antihorari.
- la MESURA DE L'ANGLE que formen, denotat $\angle ABC$, és la mesura de rotació entre les semirectes BA i BC en sentit antihorari.

Proposició 1.5. Els angles oposats per un vèrtex tenen la mateixa mesura.

Definició 1.6. Dues rectes r_1, r_2 són PARAL·LELES, denotat com $r_1 \parallel r_2$, si i només si qualsevol altra que les talla, ho fa amb el mateix angle.

Axioma 1.7. Donada una recta r i un punt P , sempre existeix una recta paral·lela a r que passa per P .

Proposició 1.8. Els angles d'un triangle sumen 180° .

Corol·lari 1.9. Dues rectes paral·leles diferents no es tallen.

Axioma 1.10. Donat un triangle,

- la longitud d'un costat és estrictament menor que la suma dels altres dos (desigualtat triangular).
- si un angle és major que un altre, el seu costat oposat és major que el de l'altre (desigualtat angle-costat).

1.2 Congruència i Semblança

Definició 1.11. Dues figures geomètriques $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ són CONGRUENTS, denotat com $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$, si i només si tenen exactament la mateixa forma i la mateixa mida. És a dir, si les longituds corresponents i la mesura dels angles corresponents (en valor absolut) són iguals.

Axioma 1.12. Dos triangles son congruents si es compleix al menys una de les següents condicions:

- Criteri CCC.
- Criteri CAC.
- Criteri ACA.

Definició 1.13. Dues figures geomètriques $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ són SEMBLANTS, denotat com $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$, si i només si tenen exactament la mateixa forma. És a dir, si els corresponents angles són iguals (en valor absolut) i les corresponents longituds tenen el mateix ràtio.

Teorema 1.14. Donats dos triangles, si $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, aleshores

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2C_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}}.$$

Axioma 1.15. Dos triangles són semblants si es compleix:

- Criteri AA.

1.3 Lloc geomètric

Definició 1.16. Donada una propietat ϕ , el LLOC GEOMÈTRIC, denotat \mathcal{LG}_ϕ , és el conjunt de punts del plà que compleixen aquesta propietat. És a dir, per tot punt P del plà,

$$P \in \mathcal{LG}_\phi \iff P \text{ compleix la propietat } \phi.$$

Definició 1.17.

- La MEDIATRIU d'un segment és la recta perpendicular que passa pel punt mig.
- Les BISECTRIUS de dues rectes secants són les rectes que passen pel punt d'intersecció i divideixen l'angle (interior i exterior, respectivament) en dues parts iguals.

Proposició 1.18. El lloc geomètric dels punts equidistants a dos punts és la mediatriu del segment que els uneix.

Proposició 1.19. El lloc geomètric dels punts equidistants a dues rectes secants són les seves bisectrius.