Resum Sis2

Pedro Bibiloni

1. Secuencias y sistemas

1.1 Definición. Una *secuencia* es una señal que depende de una variable discreta. También puede definirse como un conjunto ordenado de números o valores. Una forma habitual de definir una secuencia es:

$$x[n] = \{\dots, 0, 1, 0, 2, \underline{0}, 1, 0, 2, 2, \dots\}$$

Donde el valor subrayado corresponde al valor $n = 0$.

1.2 Definición. Los valores de la secuencia se denominan *muestras*. El número de muestras contenidas en el intervalo más pequeño que recoge todas las muestras distintas de cero es la *duración*. Una secuencia puede ser de *duración finita* o de *duración infinita*.

1.3 Definición. Una secuencia $x[n]$ es periódica o T-periódica si $x[n] = x[n+T]\ \forall n$, donde el período T es el menor número con el que se cumple la igualdad.

1.4 Definición. Un *sistema* es un dispositivo que actúa sobre secuencias. Se caracteriza por la transformación que aplica sobre una entrada $x[n]$ para obtener una salida $y[n]$.

1.5 Definición. La *respuesta impulsional* de un sistema es $h[n] = T\{\delta[n]\}$.

1.6 Proposición. *Un sistema lineal e invariante queda totalmente caracterizado por su respuesta impulsional $h[n]$, ya que en ese caso tendremos:*

$$y[n] = T\{x[n]\} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

1.7 Propiedades. Sobre la convolución:

- Conmutatividad:
$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$$
- Asociatividad:
$$x[n] * (y[n] * z[n]) = (x[n] * y[n]) * z[n]$$
- Distributiva respecto a la suma:
$$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$$

- Existencia del elemento neutro: $\delta[n]$.

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

- Retardo:

$$x[n] * y[n] = z[n] \Rightarrow x[n-k] * y[n] = x[n] * y[n-k] = z[n-k]$$

- Reflexión:

$$x[n] * y[n] = z[n] \Rightarrow x[-n] * y[-n] = z[-n]$$

- Paridad: La convolución de dos secuencias pares es par, la de dos secuencias impares es par. La de una secuencia par con una impar es impar.

1.8 Propiedades. Sobre los sistemas:

- Un sistema es *lineal* si:

$$T\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 T\{x_1[n]\} + a_2 T\{x_2[n]\}$$

- Un sistema es *invariante* si su comportamiento no depende del origen de tiempos. Análogamente, tenemos que un sistema $y[n] = T\{x[n]\}$ es *invariante* si y sólo si:

$$T\{x[n-m]\} = y[n-m]$$

- Un sistema es *causal* si la salida únicamente depende de los valores pasados y presentes de la entrada. Si el sistema es lineal e invariante, será causal si y sólo si $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$.

- Un sistema es *estable* si

$$|x[n]| < \infty \ \ \forall n \Rightarrow |y[n]| < \infty \ \ \forall n$$

  Análogamente, si el sistema es lineal e invariante, tenemos que el sistema será estable si:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

1.9 Proposición. *La salida de un sistema lineal e invariante de una secuencia exponencial es la misma exponencial multiplicada por una constante $H(z)$:*

$$x[n] = z^n \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k} h[k] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} h[k] = H(z) z^n$$

1.10 Definición. La *función de transferencia* de un sistema será la constante $H(z)$ que depende de z:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

1.11 Definición. La *respuesta frecuencial* de un sistema se define como:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

La suma es convergente si el sistema es estable.

1.12 Ejemplo. Secuencias básicas:

- *Delta o impulso unidad:*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{para otro n} \end{cases}$$

- *Secuencia escalón:*

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- *Secuencia signo:*

$$signo[n] = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- *Secuencia pulso de longitud L:*

$$p_{_L}[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{para otro n} \end{cases}$$

- *Sinusoide:*

$$x[n] \text{ sinusoide} \iff x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

- *Secuencia exponencial:*

$$x[n] \text{ exponencial} \iff x[n] = Cz^n, \;\; C, z \in \mathbb{C}$$

$$z = |z|e^{j\omega},\; C = |C|e^{j\theta} \Rightarrow x[n] = Cz^n = |C||z|^n e^{j(\omega n+\theta)} = |C||z|^n \Big[\cos(\omega n + \theta) + j\sin(\omega n + \theta)\Big]$$

1.13 Ejemplo. Sistemas básicos:

- *Retardador de m muestras:*

$$y[n] = x[n-m] \Rightarrow h[n] = \delta[n-m]$$

- *Reflexión:*
$$y[n] = x[-n] \Rightarrow h[n] = \delta[-n]$$
- *Diezmador por 2:*
$$y[n] = x[2n]$$
- *Intercalador de ceros:*
$$y[n] = \begin{cases} x[n/2] & \text{para n par} \\ 0 & \text{para n impar} \end{cases}$$

2. La Representación frecuencial

2.1 Definición. La *transformada de Fourier (TF)* de una secuencia $x[n]$ es:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n}$$

La relación se invierte mediante la expresión:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega$$

2.2 Definición. La *transformada discreta de Fourier (DFT)* de N muestras de una secuencia $x[n]$ que es nula excepto para $0 \leq n < N$, es la secuencia $X[k]$:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = X(e^{j\omega})\Big|_{w=\frac{2\pi}{N}k}$$

Que se puede invertir mediante:[1]

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}k}, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

2.3 Comentario. Si tenemos una secuencia de longitud M y calculamos su DFT de N muestras, con $N < M$, no obtendremos el muestreo de la transformada de Fourier de la secuencia, sino de la secuencia *enventanada*, es decir, de:

$$x_N[n] = x[n]p_N[n] \begin{cases} x[n] & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{para otro n} \end{cases}$$

[1]Esta expresión nos devuelve el valor de x[n] para $0 \leq n < N$, pero no para el resto de valores. Por una parte, tenemos que la señal original era nula para otros valores (por definición). Por otra, por la N-periodicidad de la transformada, tenemos que $\widetilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}k} = x[n \pmod{N}]$.

2.4 Definición. La *convolución circular* de longitud N de dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$, que denotaremos por $x[n] \circledN y[n]$, es el resultado de aplicar a una de las señales una ventana de N muestras, convolucionar ambas señales, periodificarlas, y posteriormente aplicarles otra ventana de N muestras. Podemos expresarlo como:

$$x[n] \circledN y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N} x_1[m] x_2[n + rN - m], \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

2.5 Propiedades. Sobre la transformada de Fourier y la transformada discreta:
Sean $x[n]$ y $y[n]$ dos secuncias. Sean sus transformadas de Fourier $x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, $y[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})$, y sus DFTs: $x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k]$, $y[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Y[k]$. Sean también $\widetilde{x}[n]$ y $\widetilde{y}[n]$ las transformadas inversas de Fourier periodificadas (definidas para todo n). Entonces, tenemos:

- Linealidad:
$$a_1 x[n] + a_2 y[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} a_1 X(e^{j\omega}) + a_2 Y(e^{j\omega})$$
$$a_1 x[n] + a_2 y[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} a_1 X[k] + a_2 Y[k]$$

- Reflexión (sólo para la TF):
$$x[-n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$

- Secuencia conjugada (sólo para la TF):
$$x^*[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} -X(e^{-j\omega})$$

- Dualidad (sólo para DFT, la TF no la verifica):
$$X[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} N\widetilde{x}[N-k] p_{_N}[k]$$

- Desplazamiento temporal (desplazamiento circular en el caso de la DFT):
$$x[n-m] \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$$
$$\widetilde{x}[n-m] p_{_N}[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X[k]$$

- Modulación:
$$x[n] e^{j\omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$
$$x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}ln} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \widetilde{X}[k-l] p_{_N}[k]$$

- Convolución:
$$x[n] * y[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$$
$$x[n] \circledN y[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k] Y[k]$$

- Producto de secuencias:

$$x_1[n]x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\lambda})X_2(e^{j(\omega-\lambda)})\, d\lambda$$

$$x_1[n]x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}X_1[k] \circledN X_2[k]$$

- Derivación en el dominio frecuencial (sólo para TF):

$$nx[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{dX(e^{j\omega})}{dw}$$

2.6 Ejemplo. Transformadas de Fourier de señales conocidas:

- Pulso rectangular de Longitud L, P_L:

$$P(e^{j\omega}) = e^{j\omega\frac{L-1}{2}}\frac{\sin(\omega\frac{L}{2})}{\sin(\omega\frac{1}{2})}$$

- Secuencia exponencial, $x[n] = a^n u[n]$:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{j\omega}}, \qquad |a| < 1$$

- Delta:

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1$$

- Unidad y tren de pulsos:

$$x[n] = 1 \;\; \forall n \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi i)$$

- Exponencial compleja:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi i)$$

- Función signo, $sign[n]$:

$$S(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{j\,\mathrm{tg}\,\frac{w}{2}}$$

2.7 Proposición (Igualdad de Párseval)**.** *Tanto para la Transformada de Fourier como para la Transformada Discreta, tenemos:*

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\, d\omega$$

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

2.8 Definición. La *energía* de una secuencia $x[n]$ es:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Esto nos clasifica a las secuencias en dos tipos: las secuencias de *energía finita* y las de *energía infinita*.

2.9 Definición. La *potencia media* de una secuencia $x[n]$ se define como:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Lo que también nos clasifica a las secuencias en dos grupos: las secuencias de *potencia media finita* y las de *potencia media infinita*.

2.10 Comentario. La potencia media de una señal periódica P-periódica es:

$$P_x = \frac{1}{P} \sum_{m=0}^{P-1} |x[m]|^2$$

2.11 Definición. La *correlación cruzada* de una secuencia $x[n]$ con otra secuencia $y[n]$, ambas de energía finita se define como:

$$r_{xy}[m] = x[m] * y^*[-m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n-m]$$

Si las dos secuencias son de potencia media finita, tenemos que la *correlación cruzada* es:

$$r_{xy}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} x_N[m] * y_N^*[m]$$

Donde x_N y y_N son las secuencias $x[N]$ e $y[n]$ respectivamente, enventanadas con una ventana centrada en el origen y de longitud $2N+1$.

2.12 Definición. La *autocorrelación* de una secuencia $x[n]$ de energía finita es:

$$r_{xx} = r_x = x[m] * x^*[-m]$$

La *autocorrelación* de una secuencia $x[n]$ de potencia media finita se define como:

$$r_x[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} r_{x_N}[m]$$

donde $r_{x_N}[m]$ es la autocorrelación de x_N, es decir, de la secuencia $x[n]$ multiplicada por una ventana centrada en el origen y de longitud $2N+1$.

2.13 Ejemplo. La *correlación cruzada* de dos secuencias exponenciales $x[n] = ae^{j\omega_1 n}$, $y[n] = be^{j\omega_2 n}$ es:

$$r_{xy}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} x_N[m] * y_N^*[m] = \begin{cases} ab^* e^{j\omega_1 m} & w_2 = w_1 + 2\pi i \\ 0 & w_2 \neq w_1 + 2\pi i \end{cases}$$

2.14 Propiedades. Sobre la autocorrelación: sea $x[n]$ una secuencia de energía finita.

- Energía: $r_x[0] = E_x$.
- Simetría: $r_x[m] = r_x^*[-m]$.
- Si $x[n]$ es real $\Rightarrow r[m]$ es real y par.
- La autocorrelación de $x[n]e^{j\omega_0 n}$ es $r_x[m]e^{j\omega_0 m}$.
- La autocorrelación siempre tiene un máximo en el origen: $r_x[0] \leq |r_x[m]| \ \ \forall m$.

2.15 Definición. Dos secuencias son *incorreladas* si $r_{xy} = r_{yx} = 0$.

2.16 Comentario. La autocorrelación de la suma de dos secuencias es:

$$r_{x+y}[m] = r_x[m] + r_y[m] + r_{xy}[m] + r_{yx}[m]$$

Y coincide con la suma de autocorrelaciones de las dos secuencias si las señales son incorreladas.

2.17 Definición. La *densidad espectral de energía* de una secuencia de energía finita se define como la transformada de Fourier de la autocorrelación:

$$S_x(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_x[m]\} = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \geq 0 \qquad \forall\omega$$

En el caso de una secuencia de potencia media finita, tenemos que la densidad espectral de energía es:

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} S_{x_N}(e^{j\omega})$$

Donde S_{x_N} es la transformada de Fourier de r_{x_N}. Esto es:

$$S_{x_N} = \mathcal{F}\{r_{x_N}\}$$

2.18 Proposición. *La integración en frecuencia de la densidad espectral de energía nos da la energía de la secuencia $x[n]$:*

$$E_x = r_x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\, d\omega$$

2.19 Definición. El *diezmado* es una manipulación de secuencias en la que eliminamos $N-1$ de cada N muestras, obteniendo así, de una entrada $x[n]$, la salida $y[n] = x[nN]$. Para ver la relación que hay entre las transformadas, introduciremos $v[n]$:

$$v[n] = \begin{cases} x[n] & n = kN \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Con lo que tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} V(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1} X(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}i\right)}) \\ \\ Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\frac{\omega}{N}}) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} X(e^{j\left(\frac{\omega}{N} - \frac{2\pi}{N}i\right)})$$

En frecuencia, tendremos una disminución del módulo de la transformada de Fourier (en un factor de $\frac{1}{N}$). La gráfica de la transformada quedará "estirada". Por este motivo, y para evitar *aliasing*, la secuencia a diezmar no puede tener componentes frecuenciales $\omega \geq \frac{\pi}{N}$.

2.20 Definición. La *interpolación* es la operación "inversa" al diezmado. Ésta consiste en intercalar muestras en una secuencia dada, y darles valores según una aproximación (lineal, cuadrática, etc.). También podemos definir una secuencia auxiliar para encontrar la transformada de Fourier:

$$v[n] = \begin{cases} x[n/N] & n = kN \\ 0 & \text{otro n} \end{cases}$$

Con lo que tenemos que $v[n]$ es la secuencia $x[n]$ con ceros intercalados en las posiciones en las que debemos aproximar el valor. Dado que no tenemos sólo una manera de aproximar el valor, sino varias (normalmente con la ayuda de un filtro $H(e^{j\omega})$), tenemos:

$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega N}) \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega N})H(e^{j\omega})$$

Donde $H(e^{j\omega})$ es la función de transferencia del sistema que actúa sobre $v[n]$ (no sobre $x[n]$). La gráfica de la transformada de Fourier de $v[n]$ será como la de $x[n]$, pero"contraida" en un factor N.

3. Entorno analógico

3.1 Definición. Un *conversor analógico-digital (A/D)* es un sistema electrónico que, dada una señal analógica $x(t)$ proporciona una secuencia $x[n] = x(t_0 + \frac{n}{F_m})$, donde F_m es la *frecuencia de muestreo*. Las muestras son tomadas, por tanto, a un ritmo regular (cada tiempo $T = \frac{1}{F_m}$, el *período de muestreo*).

3.2 Definición. El *conversor digital-analógic (D/A)* es un dispositivo electrónico que hace la función inversa a la del conversor (A/D), es decir, dada una secuencia $x[n]$, saca una salida $x(t)$ que, por cada muestra de $x[n]$, saca un pulso rectangular "estrecho" con amplitud proporcional al valor de la muestra.

3.3 Teorema (Criterio de Nyquist)**.** *La operación que efectúa un conversor (A/D) se denomina* muestreo. *Si la señal analógica a muestrear tiene una componente frecuencial F, tenemos que la señal analógica originada por el muestreo, con frecuencia de muestreo F_m, será:*

$$f = \frac{F}{F_m}$$

Para evitar el aliasing, deberemos asegurarnos de que $F < \frac{F_m}{2}$. De hecho, basta con asegurar que el ancho de banda de $x(t)$, BF, es menor que la mitad de la frecuencia de muestreo: $BF < \frac{F_m}{2}$.

3.4 Comentario. Nos puede interesar utilizar sistemas digitales para multiplexar, demultiplexar, cambiar la frecuencia de una señal, etc. En ese caso, "jugaremos" con los valores de las frecuencias de muestreo, y aplicaremos interpolación o diezmado, para obtener la salida deseada.

4. Sistemas lineales e invariantes

4.1 Definición. La *transformada Z* de una secuencia $x[n]$ es la función de variable compleja $X(z)$ definida como:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

La *transformada Z inversa* se obtiene con la siguiente expresión:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz$$

4.2 Definición. El conjunto de valores de z para los cuales la serie de potencias $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ converge se llama la *región de convergencia (ROC)*.

En general, el radio de convergencia (ROC) es un anillo en el plano complejo.

4.3 Proposición (Relación con la transformada de Fourier)**.** *La TF es un caso particular de la Transformada Z. En general, tenemos que:*

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Puesto que $z \in \mathbb{C}$, podemos expresar $z = re^{j\omega}$ y obtener que:

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

Que es la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]r^{-n}$. Además, esta relación también se encuentra en la transformada inversa: mediante el cambio $z = re^{j\omega}$ obtenemos:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})r^{n-1}e^{j\omega(n-1)}jre^{j\omega}\,d\omega = r^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

Que es el producto de r^n por la transformada inversa de Fourier de $X(re^{j\omega})$.

4.4 Propiedades. Sobre la transformada Z: Sean:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad ROC: \ R_x \ \ (r_1 < |z| < r_2)$$
$$y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z) \qquad ROC: \ R_y$$

- Linealidad:

$$a_1 x[n] + a_2 y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} a_1 X(z) + a_2 Y(z) \qquad ROC: R_x \cap R_y$$

- Desplazamiento temporal:

$$x[n-m] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-m} X(z) \qquad ROC: R_x \text{ (excepto quizás z=0 ó z=}\infty\text{)}$$

- Convolución:

$$x[n]y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z) \qquad ROC: R_x \cap R_y$$

- Multiplicación por secuencia exponencial:

$$a^n x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z/a) \qquad ROC: |a|R_x \Rightarrow |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

- Reflexión en el tiempo:

$$x[-n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(1/z) \qquad ROC: \frac{1}{R_x} \Rightarrow \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

- Derivación en el dominio z:

$$nx[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad ROC: R_x \text{ (excepto quizás z=0 ó z=}\infty\text{)}$$

4.5 Teorema (Del valor inicial)**.** *Si $x[n]$ es causal, entonces:*

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

4.6 Definición. La *función de transferencia* de un sistema lineal e invariante es la transformada Z de su respuesta impulsional $h[n]$:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

El sistema queda totalmente caracterizado por la *función de transferencia*, ya que para una entrada $x[n]$, tenemos que su salida es $y[n] = x[n] * h[n]$, y podemos obtener su transformada Z como $Y(Z) = X(Z)H(Z)$.

4.7 Definición. La salida que se obtiene de un sistema de acuerdo con la excitación aplicada se le denomina *respuesta forzada.* A la que evoluciona según los polos de la función de transferencia se les denomina *respuesta libre.*

4.8 Propiedades. Sobre la función de transferencia:

- Un sistema lineal e invariante es *estable* si y sólo si la ROC de su función de transferencia incluye la circunferencia de radio unidad.
- Un sistema es lineal e invariante es *causal* si y sólo si la ROC de su función de transferencia es el exterior de una circunferencia, es decir, si $ROC = \{z \mid |z| > K\}$.

4.9 Comentario. Gracias a la transformada Z, podemos resolver ecuaciones en diferencias finitas: primero convertimos la ecuación mediante la transformada Z, luego aislamos la incógnita y finalmente resolvemos encontrando la transformada inversa. Por ejemplo, de:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + \delta[n]$$

Obtendríamos:

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + Y(z)z^{-2} + 1 \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

Que resolveríamos buscando la transformada Z.

También seremos capaces de encontrar la función de transferencia dada una ecuación en diferencias finitas: dada

$$\sum_{k=0}^{P} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k]$$

Tenemos, gracias a la transformada Z, que:

$$\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k} X(z)$$

Y obtenemos la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k}}$$

4.10 Comentario. La ROC de una transformada Z racional siempre está limitada por los polos (es decir, no puede "atravesar" ningún polo). Podemos obtener diversas "antitransformadas" según en qué región nos situemos.

4.11 Definición. La *transformada Z unilateral* de una secuencia $x[n]$ se define como la transformada Z de la parte causal de la secuencia, es decir, de la secuencia $x[n]u[n]$:

$$X^+(z) = \mathcal{Z}^+\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

4.12 Comentario. La transformada Z unilateral siempre tiene la ROC en el exterior de un círculo (viene de una señal causal) y no se especifica. Además, funcionan todas las propiedades de la transformada Z, excepto la del desplazamiento temporal, que queda:

$$y[n] = x[n-1] \Rightarrow Y^+(z) = y[0] + z^{-1}X^+(z) = x[-1] + z^{-1}X^+(z)$$