# Resumen de Campos Electromagnéticos

Bartomeu Kane Binimelis

21 de junio de 2011

# 1. Campos eléctricos y magnéticos en condiciones estáticas

## 1.1. El campo eléctrico en el vacío

### Ley de Coulomb. Definición de campo eléctrico

Consideremos dos cuerpos cargados con cargas $q_1, q_2$. Se comprueba que la fuerza que cada uno de ellos ejerce sobre el otro es:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

donde $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ F/m$.

**Definición.** El *campo eléctrico* $\vec{E}(\vec{r})$ en un punto $\vec{r}$ del espacio, creado por un cuerpo cargado, es la fuerza que ejercería el cuerpo sobre la unidad positiva de carga si estuviera situada en dicho punto.

### Cargas puntuales y distribuciones de carga

El campo eléctrico creado por una carga puntual $q$ es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

donde $\vec{r}$ es el punto donde medimos el campo y $\vec{r}_0$ es la posición de la carga puntual de valor $q$.

El campo eléctrico creado por una distribución de cargas puntuales $q_i$ situadas en puntos $\vec{r}_i$ es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

**Definición.**

- *Densidad lineal* de carga: $\lambda(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}, \quad [C/m]$.
- *Densidad superficial* de carga: $\sigma(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}, \quad [C/m^2]$.
- *Densidad volúmica* de carga: $\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}v}, \quad [C/m^3]$.

Si nos encontramos en un medio continuo con presencia de diferentes densidades de carga, entonces el campo eléctrico valdrá:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{V_0}\frac{\rho(\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\mathrm{d}v + \int_{S_0}\frac{\sigma(\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\mathrm{d}s + \int_{L_0}\frac{\lambda(\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\mathrm{d}l\right]$$

### Ley de Gauss

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta contenida en el volumen interior:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{Q_T|_S}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(r)\mathrm{d}v$$

## Potencial eléctrico. Carácter conservativo del campo electrostático

**Definición.** La *diferencia de potencial* entre dos puntos es la circulación del campo eléctrico a lo largo de la trayectoria seguida para llegar de uno a otro. Corresponde al trabajo que realiza el campo para trasladar la unidad positiva de carga de un punto al otro.

$$\Delta\phi_{BA} = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad [V]$$

**Definición.** El *potencial* creado por una distribución de carga en un punto del espacio equivale al trabajo que realiza el campo para llevar la carga positiva unidad desde un punto hasta el infinito.

$$\phi(\vec{r}) = -\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Observamos que de esta definición de deduce:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$$

**Comentario.** Podemos afirmar que un campo que puede obtenerse como gradiente de una función escalar es *irrotacional* o *conservativo*, es decir, que la circulación de dicho campo a lo largo de una trayectoria cerrada es siempre nula.

## Relación entre el potencial eléctrico y la densidad de carga

Si nos encontramos en una región con una distribución volúmica de carga, podemos expresar el potencial como sigue:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0}\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\mathrm{d}v$$

## El campo eléctrico y el potencial en conductores

A partir de la ley de Gauss de demuestran las siguientes afirmaciones:

- Los medios conductores son volúmenes equipotenciales.
- En el interior de un conductor el campo eléctrico es nulo.
- En el interior de un conductor la carga neta es nula.
- La carga neta de un conductor se distribuye sobre su superficie.

## El campo eléctrico en la superficie de un conductor

La carga eléctrica superficial de un conductor provoca la aparición de campos eléctricos en sus inmediaciones. El campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie del conductor, que es una superficie equipotencial. Podemos escribirlo así:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

donde $\sigma(\vec{r})$ es la distribución en la superficie del conductor y $\hat{n}$ es el vector unitario exterior a la superficie.

## Dipolo real y dipolo ideal

**Definición.** Un *dipolo real* es una distribución formada por dos cargas puntuales de igual magnitud $|q|$ y signos opuestos separadas una distancia $d$.

El *momento dipolar* $\vec{p}$ de un dipolo real es $\vec{p} = q\cdot\vec{d}$, donde $q$ es el valor de la carga positiva y $\vec{d}$ es la distacia que separa ambas cargas, con el vector orientado hacia la carga positiva.

Un *dipolo ideal* es la distribución obtenida al hacer tender la distacia $d$ a cero conservando el valor del momento dipolar.

El potencial creado en el espacio por un dipolo ideal es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

## 1.2. El campo electrostático en presencia de medios dieléctricos

### Vector polarización

**Definición.** El *vector de polarización* es la densidad de momento dipolar por unidad de volumen:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}v} \quad [C/m^2]$$

La contribución del dieléctrico polarizado al potencial del espacio es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0}\frac{\vec{P}(\vec{r})(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\mathrm{d}v$$

### Relación entre el vector polarización y el campo eléctrico. Tipos de dieléctricos

Queremos relacionar el vector polarización con el campo eléctrico que hay en el ambiente. Si consideramos un material *lineal, homogéneo* e *isótropo* entonces se cumple:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}(\vec{r})$$

donde $\chi_e$ es la susceptibilidad eléctrica del medio, adimensional y positiva.

- En los medios *inhomogéneos* se mantiene la misma relación, pero la susceptibilidad es función de la posición: $\chi_e = \chi_e(\vec{r})$
- En los medios *anisótropos* la susceptibilidad se convierte en un tensor:

$$\chi_e = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

  y los vectores $\vec{P}$ y $\vec{E}$ no son paralelos en general.
- En los medios *no lineales* la polarización varía con la intensidad del campo aplicado: $\chi_e = \chi(\vec{E}(\vec{r}))$

De ahora en adelante consideraremos únicamente medios lineales e isótropos.

El potencial eléctrico producido por el dieléctrico polarizado es de la forma:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_0}\frac{\vec{P}(\vec{r}_0)\cdot\hat{n}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\mathrm{d}s + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0}\frac{-\nabla\cdot\vec{P}(\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\mathrm{d}v$$

A partir de la expresión anterior podemos afirmar que un dieléctrico polarizado puede caracterizarse a partir de dos magnitudes relacionadas con su vector de polarización:

$$\vec{P}(\vec{r})\cdot\hat{n}\Big|_S \equiv \sigma_b(\vec{r})$$
$$-\nabla\cdot\vec{P}(\vec{r}) \equiv \rho_b(\vec{r})$$

### Ley de Gauss en medios dieléctricos. Vector desplazamiento eléctrico

Las cargas ligadas (que aparecen debido a la polarización de materiales) nos obligan a reescribir la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{Q_f + Q_b}{\varepsilon_0}$$

donde $Q_f$ y $Q_b$ son las cargas libres y ligadas contenidas en el interior de la superficie considerada. Equivalentemente, en forma diferencial:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f+\rho_b}{\varepsilon_0}$$

**Definición.** El *vector desplazamiento eléctrico* es:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad [C/m^2]$$

De acuerdo con lo propuesto en secciones anteriores,

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r})$$

donde

- $\varepsilon_r = 1+\chi_e$ es la *permitividad relativa del medio.*

- $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ es la *permitividad dieléctrica del medio.*

Podemos reescribir la ley de Gauss en forma diferencial o integral:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho, \qquad \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q|_S$$

donde $\rho$ es la densidad de carga libre y $Q$ es la carga total libre encerrada en la superficie.

**Comentario.** La carga total ligada debe ser cero.

## 1.3. El campo magnetostático en el vacío

### Introducción

Consideremos dos hilos conductor por los que circulan corrientes eléctricas $I_1, I_2$. Entonces, la *fuerza magnética* que el segundo ejerce sobre el primero es:

$$|\vec{F}_{21}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_2 \times (\mathrm{d}\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $[H/m]$ es la *permeabilidad magnética* del vacío.

### Densidad e intensidad de corriente. Ley de Ohm

**Definición.** Dependiendo de las cargas causantes de las corrientes consideraremos distintas *densidades de corriente:*

- *Volúmica.* $\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v} \quad [A/m^2]$
- *Superficial.* $\vec{J}_S(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\vec{v} \quad [A/m]$

donde $\vec{v}(\vec{r})$ es la *velocidad de desplazamiento* de las cargas.

**Definición.** La *intensidad de corriente* es el flujo de carga eléctrica que atraviesa por unidad de tiempo una sección determinada del medio. Según la densidad de corriente que estemos tratando:

- *Volúmica.* $\vec{J}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad I|_S = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$
- *Superficial.* $\vec{J}_S(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad I|_L = \int_L \vec{J}_S(\vec{r}) \cdot \hat{n}\mathrm{d}l$

**Comentario.** Las cargas eléctricas se desplazan debido a dos causas principales:

- El cuerpo en el que están situadas las cargas se mueve (corrientes de convección).
- Las cargas libres de un medio conductor son arrastradas por un campo eléctrico (corrientes de conducción).

Las corrientes de conducción obedecen la *ley de Ohm*:

$$\vec{J} = g\vec{E}$$

donde $g$ $[1/\Omega m]$ es la *conductividd del medio.*

### Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias

**Definición.** Las *corrientes estacionarias* son aquellas en las que no se producen ni acumulación ni vaciamiento de carga en las secciones del conducto por las que fluyen. Equivalentemente, una corriente estacionaria arrastra constantemente la misma carga a través de las diferentes secciones por las que fluye.

$$\oint_S = \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \quad \forall\, S$$

La *ecuación de continuidad* se satisface para todo tipo de corrientes:

$$\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_V \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t} \mathrm{d}v$$

La versión diferencial de la ecuación anterior es:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

### Ley de Biot y Savart

Una carga puntual que se mueve con velocidad $v$ en el seno de un campo magnético experimenta una fuerza magnética (conocida también como *de Lorentz*) dada por:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}_{ext}$$

El campo magnético creado por una densidad de corriente sobre cierto punto del espacio $\vec{r}$ es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \mathrm{d}v$$

y la expresión de la fuerza ejercida sobre otra posible corriente situada en su seno:

$$\vec{F} = \int_V \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \mathrm{d}v$$

### Carácter solenoidal del campo magnético

Las líneas de campo magnético siguen siempre trayectorias cerradas. Un campo vectorial con esa propiedad se denomina *campo senoidal*. Una consecuencia de lo anterior es que el flujo de cualquier campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo.

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \quad \forall\, S \text{ cerrada}$$

### Ley de Ampère

La *ley de Ampère* establece que la circulación de $\vec{B}$ a lo largo de un camino cerrado es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa la superficie limitada por el camino:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Aplicando el teorema de Stokes obtenemos la forma diferencial de esta ley:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

### Cálculo de B mediante la ley de Ampère en forma integral

Todo campo senoidal puede ser expresado como el rotacional de otro campo. En el caso del campo magnético, a ese otro campo lo denominaremos *potencial vector magnético*:

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$$

Si además imponemos $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ entonces el campo solución es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J}(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \mathrm{d}v$$

### Aproximación de B a grandes distancias. Momento dipolar magnético

A menudo estaremos interesados en conocer el campo que se establece a grandes distancias de una distribución de corriente dada. Para ellos desarrollaremos el potencial vector magnéticio en serie de Taylor y obtendreos los *momentos* de la fuente. Debido a la cancelación del momento de primer orden resulta que en la mayoría de ocasiones la aproximación siguiente es suficientemente buena:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

donde $\vec{m}$ es el *momento dipolar magnético* de la distribución, definido como:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} \mathrm{d}v$$

## 1.4. Campos magnéticos en medios materiales

### Vector magnetización

**Definición.** El *vector magnetización* en un medio material es la densidad de momento dipolar por unidad de volumen:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}v} \quad [A/m]$$

### Densidades de corriente de magnetización

El vector magnetización nos permite definir las siguientes densidades de corriente:

- *Densidad volúmica de corriente de magnetización:* $\vec{J}_M(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$
- *Densidad superficial de corriente de magnetización:* $\vec{J}_{SM}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}|_S$

### Ley de Ampère en medios magnéticos. Intensidad de campo magnético

Reescribimos la ley de Ampère, ahora teniendo en cuenta las corrientes de magnetización creadas en un medio material:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \vec{J}_M \right)$$

Si tenemos en cuenta las definiciones anteriores la expresión previa es equivalente a:

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

**Definición.** El *campo magnético* o *intensidad de campo magnético* es:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad [A/m]$$

La ley de Ampère aplicada a este campo nos queda:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad\qquad \oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

El sentido de la definición de $\vec{H}$ es el mismo que el del vector $\vec{D}$, podemos trabajar en el seno de medios materiales como si lo estuviéramos haciendo en el vacío.

### Relación entre el campo magnético y el vector magnetización

La relación entre el vector magnetización y el campo magnético se establece mediante la expresión:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

donde $\chi_m$ es la llamada *susceptibilidad magnética del medio*. Si limitamos esta relación al caso lineal:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{aligned}$$

donde $\mu_r = 1 + \chi_m$ es la permeabilidad relativa y $\mu = \mu_0 \mu_r$ es la permeabilidad absoluta del material.

### Tipos de medios magnéticos

# 2. Ecuaciones de Maxwell

## 2.1. Ecuaciones de Maxwell en forma integral en el vacío

### Ley de Gauss para el campo eléctrico

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

### Ley de Gauss para el campo magnético

El flujo del campo magnético sobre una superficie cerrada debe ser nulo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

### Ley de Faraday

La ley de Faraday nos dice que la variación de flujo de campo magnético con el tiempo crea campos eléctricos, y por lo tanto induce una *f.e.m.* en el circuito considerado:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

La corriente inducida en el circuito a su vez crea un campo magnético que se opone a la variación de flujo.

### Ley de Ampère-Maxwell

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \left( I + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right)$$

### Principio de conservación de la carga

La carga total ni se crea ni se destruye. Si hay variaciones en una región determinada del espacio es porque la carga abandona dicha región (hay corrientes). A partir de las ecuaciones anteriores se puede deducir la ecuación de continuidad:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q = \oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

### Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo

- Ley de Gauss para $\vec{E}$.
- Ley de Gauss para $\vec{B}$.
- Ley de Faraday.
- Ley de Ampère-Maxwell.

A las anteriores podemos añadir:

- Ecuación de Continuidad (deducible a partir de las otras).
- Fuerza de Lorentz

## 2.2. Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

### Significado del rotacional y de la divergencia

**Teorema** (de la divergencia)**.** $\oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V \nabla \vec{A} \cdot \mathrm{d}v$

**Teorema** (de Stokes)**.** $\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

### Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

Si aplicamos los dos teoremas anteriores podemos deducir formas equivalentes de las ecuaciones de Maxwell:

| | |
|---|---|
| **Ley de Gauss para $\vec{E}$:** | $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ |
| **Ley de Gauss para $\vec{E}$:** | $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ |
| **Ley de Faraday:** | $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ |
| **Ley de Ampère-Maxwell:** | $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_v + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ |
| **Ecuación de Continuidad:** | $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho = \nabla \cdot \vec{J}$ |

## 2.3. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

### Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo en medios materiales

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_f + \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

A éstas también podemos añadir:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

## 2.4. Condiciones de contorno

### Continuidad de los campos eléctricos

Si tenemos dos medios con campos eléctricos $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ y vectores desplazamiento eléctrico $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ entonces se cumple:

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$$
$$\hat{n}\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie de separación de los medios y $\sigma$ es la densidad de carga de dicha superficie.

### Continuidad de los campos magnéticos

Si tenemos dos medios con campos inducción magnéticos $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ y campos magnéticos $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ entonces se cumple:

$$\hat{n}\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$$
$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie de separación de los medios y $\vec{J}_S$ la densidad de corriente superficial.

## 2.5. Energía de los campos electromagnéticos

### Potencia aplicada sobre portadores de carga

**Definición.** El *trabajo* sobre una carga puntual que se desplaza un $\mathrm{d}\vec{r}$ viene dado por:

$$\mathrm{d}W_q = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \\ = q\vec{E}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t$$

donde $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$.

**Definición.** La *potencia* que un campo eléctrico $\vec{E}$ suministra a una carga en su seno es:

$$P_q = \frac{\mathrm{d}W_q}{\mathrm{d}t} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$$

**Definición.** La *densidad de potencia* sobre las cargas es:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \vec{J}_C\cdot\vec{E} \quad [W/m^3]$$

**Definición.** La *potencia* que suministran las cargas al campo se calcula mediante:

$$P = -\int_V \vec{J}_g\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}v$$

**Principio de conservación de la energía. Teorema de Poynting**

Para el caso del electromagnetismo, el principio de conservación de la energía puede escribirse matemáticamente así:

$$-\int_V \vec{J}_g \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}v = \frac{\partial}{\partial t}\int_V U\,\mathrm{d}v + \oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}v$$

donde el primer término corresponde a la potencia suministrada al campo por las cargas. Por otro lado, $U$ es la *densidad de energía electromagnética* y $\vec{P}$ es la densidad de flujo de potencia. El último término corresponde a las pérdidas óhmicas.

**Teorema** (de Poynting)**.** Si consideramos $\vec{J} = \vec{J}_g + \vec{J}_C$ entonces:

$$-\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}v = \frac{\partial}{\partial t}\int_V U\,\mathrm{d}v + \oint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

**Definición.** El *vector de Poynting* es $\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} \quad [W/m^2]$.

**Definición.** La densidad de energía electromagnética se divide en dos términos:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\vec{H}|^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B},$$
$$U_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}, \qquad U_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

donde $U_e$ corresponde a la energía eléctrica y $U_m$ corresponde a la energía magnética.

## 2.6. Aproximación estática de las ecuaciones de Maxwell

### Electrostática

Las ecuaciones que rigen la electrostática son:

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$
$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

de las cuales se deduce la siguiente para el potencial eléctrico:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

### Magnetostática

Las ecuaciones que rigen la magnetostática son:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

de las cuales se deduce la siguiente para el potencial vector magnético:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

## 2.7. Ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente

### Fasores y campos instantáneos

Si consideramos la densidad de carga en régimen senoidal permanente la podremos escribir como:

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\cos(\omega t + \theta_p(\vec{r}))$$

Esta distrubución de cargas creará un campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_x(\vec{r},t)\hat{x} + E_y(\vec{r},t)\hat{y} + E_z(\vec{r},t)\hat{z}$$

donde cada componente tendrá la forma:

$$E_i(\vec{r},t) = E_{0i}(\vec{r})\cos(\omega t + \theta_{Ei}(\vec{r}))$$

Notamos que en las expresiones anteriores se explicita la dependencia temporal del campo.

Introducimos la notación fasorial:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})e^{j\theta_\rho(\vec{r})}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\hat{x} + E_y(\vec{r})\hat{y} + E_z(\vec{r})\hat{z}$$
$$E_i(\vec{r}) = E_{0i}(\vec{r})e^{j\theta_{Ei}(\vec{r})}$$

Si queremos obtener la densidad y el campo instantáneos,

$$\rho(\vec{r}, t) = \texttt{Re}\{\rho(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\}$$
$$\mathcal{E}_i(\vec{r}, t) = \texttt{Re}\{E_{0i}(\vec{r})e^{j\theta_{Ei}(\vec{r})} \cdot e^{j\omega t}\}$$

**Comentario.** Con letra normal designaremos los campos fasoriales $(E, H, D, B)$ y con letra caligráfica denotaremos los campos instantáneos $(\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{B})$.

#### Ecuaciones de Maxwell en R.S.P.

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{B}(\vec{r}) \qquad \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho$$
$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \qquad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega\vec{D}(\vec{r})$$

**Definición.** El *vector de Poynting medio* es

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{1}{2}\texttt{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

# 3. Ondas planas uniformes

## 3.1. Ecuación de onda

Usando las *ecuaciones de Maxwell* comentadas en el tema anterior, obtenemos que la dependencia temporal del campo magnético conlleva la dependencia temporal del campo eléctrico y viceversa. Desarrollando las expresiones de Maxwell, podemos obtener las ecuaciones que cumplen las ondas tanto magnéticas como eléctricas.

#### Ondas planas uniformes con dependencia espacio-temporal arbitraria

Si consideramos la región lejos de cargas e intensidades, entonces las expresiones de las ecuaciones de onda son:

$$\bigtriangledown^2\mathcal{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial t^2} = 0$$
$$\bigtriangledown^2\mathcal{H} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial t^2} = 0$$

Para solucionar las dos ecuaciones de onda anteriores, supondremos que $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E} = 0$, una hipótesis que da sentido físico a la solución (en otro caso ésta carecería de sentido físico, invalidando así el desarrollo). Supondremos tambén que el campo tiene sólo componente en $x$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x\widehat{x}$. Con éstas dos hipótesis podemos resolver ahora la ecuación haciendo uso del teorema de d'Alambert:

$$\mathcal{E} = (f_1(z - vt) + f_2(z + vt))\widehat{x}$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Notemos que $f_1, f_2$ dependerán de las condiciones iniciales. Ahora, a partir de la expresión del campo eléctrico, podemos deducir la expresión de $\mathcal{H}$, que después de aplicar las ecuaciones de Maxwell e integrar quedará escrito como:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\eta}(f_1(z - vt) - f_2(z + vt))\widehat{y}$$
$$\eta = \mu v$$

## 3.2. Ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente

En el caso de régimen senoidal permanente, la forma del campo impone condiciones de contorno para las funciones solución, de manera que obtenemos:

$$f_1(z - vt) = A\cos(\omega t - kz + \varphi_1)$$
$$f_2(z + vt) = Bcos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

Las soluciones de la ecuación en este caso serán:

$$\mathcal{E}(z,t) = E^+_{ox}cos(\omega t - kz + \varphi^+_x)\widehat{x} + E^+_{oy}cos(\omega t - kz + \varphi^+_y)\widehat{y} + E^-_{ox}cos(\omega t - kz + \varphi^-_x)\widehat{x} + E^-_{oy}cos(\omega t - kz + \varphi^-_y)\widehat{y}$$
$$\mathcal{H}(z,t) = \frac{1}{\eta}(E^+_{ox}cos(\omega t - kz + \varphi^+_x)\widehat{y} - E^+_{oy}cos(\omega t - kz + \varphi^+_y)\widehat{x} - E^-_{ox}cos(\omega t - kz + \varphi^-_x)\widehat{y} + E^-_{oy}cos(\omega t - kz + \varphi^-_y)\widehat{x})$$

Utilizando la notación fasorial nos queda:

$$E = E^+_c e^{-jkz} + E^-_c e^{jkz}$$
$$H = H^+_c e^{-jkz} + H^-_c e^{jkz}$$

### Ecuación de onda en régimen senoidal permanente

Para simplificar de manera notable la notación en el resto del capítulo usaremos la notación fasorial presentada anteriormente. De esta manera, será suficiente obtener el fasor $E$ para determinar el campo instántaneo $\mathcal{E} = \mathtt{Re}(Ee^{jwt})$. Las ecuaciones de onda para campos eléctricos y magnéticos nos la muestra la *ecuación de Helmholtz*:

$$\bigtriangledown^2 E + k^2 E = 0 \qquad \text{con} \quad k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

### Solución correspondiente a la onda plana uniforme

La solución de la ecuación anterior es de la forma:

$E(r) = E_c e^{-jkr}$

$E_c$ es un vector complejo

$r$ es el vector de posicion en el punto

$k$ es el vector de propagación o de onda, de módulo en número de onda y dirección arbitraria

Para completar la solución, tiene que cumplirse que:

$$kE_c = 0$$

En el caso de las ondas magnéticas, de la expresión de $E$ obtenemos:

$$H(r) = \frac{\widehat{k}}{\eta} \times E$$

### Características de la onda plana uniforme

Notemos que la representación fasorial no nos aporta una idea intuitiva del campo resultante. Por este motivo comentaremos algunas características observables en la onda plana resultante:

- La onda se propoga en la dirección de $\widehat{k}$.
- Si el periodo temporal es $T_m = \frac{2\pi}{\omega}$, el espacial es $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{f}$.
- $\widehat{\mathcal{E}}\,\widehat{k} = 0 \quad \Rightarrow$ La dirección de propagación es perpendicular al campo.
- El campo magnético cumple también que $\mathcal{H}\widehat{k} = 0 \quad \Rightarrow$. Notemos que $EH = 0$, por lo que $[\widehat{k}, \mathcal{E}, \mathcal{H}]$ es base ortogonal.
- La relación entre módulos se escribe como: $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} = \eta$.

La situación de ondas planas nos permite definir algunos conceptos importantes para la visualización de las mismas:

**Definición.** El *frente de onda* es el lugar geométrico de los puntos con la misma fase en un instante. Como la fase es:

$$\theta(r,t) = \omega t - kr + \varphi$$

Y $\omega t$ y $\varphi$ son constantes, la condición del frente de onda es:

$$kr = 0$$

**Definición.** La *velocidad de fase en la dirección* $\widehat{u}$ es aquella a la que debemos desplazarnos para que la fase se mantenga constante. La velocidad de fase en ondas planas uniformes tendrá la expresión de:

$$v_{\widehat{u}} = \frac{\omega}{k\widehat{k}\widehat{u}}$$

### Densidad de flujo de potencia asociada a la onda

En notación fasorial podemos expresar el vector de Pointing $\mathcal{P}$ como $P$, independiente del tiempo ya que su depencia también en senoidal. Desarrollando las expresiones conocidas de $\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$, obtenemos:

$$P = \frac{1}{2\eta}|E_c|^2\widehat{k} = \frac{\eta}{2}|H_c|^2\widehat{k}$$

## 3.3. Polarización de ondas planas uniformes en R.S.P.

### Descripción matemática de la polarización

Dado que $kE = 0 \quad kH = 0$, los campos $H$ y $E$ están situados en el mismo plano. Por ello, podemos encontrar dos vectores arbitrarios $e_1, e_2$ tales que $\{k, e_1, e_2\}$ sea una base rectangular positiva. Expresemos $H_c$ y $E_c$ mediante dicha base:

$$E_c = C(e_1 + pe^{j\Delta\varphi}e_2)$$
$$H_c = \frac{C}{\eta}(e_2 - pe^{j\Delta\varphi}e_1)$$

### Características de la elipse de polarización

Podemos encontrar toda la información de la polarización de un campo si consideramos la elipse que nos define su polarización en un punto cualquiera. De hecho, podemos reducir la información necesaria a tres datos para conocer completamente la polarización del campo. Éstos son:

- La *orientación* es el ángulo que el eje mayor forma con $e_1$. El cálculo explíctico es:

$$\beta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\cos(\Delta\varphi)}{\frac{1}{p} - p}$$

- La *relación axial* es la relación entre el eje mayor y el eje menor de la elipse. El cálculo se explicita como:

$$R = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\frac{\sin(\Delta\varphi)}{\frac{1}{p}+p}^2}}{1 - \sqrt{1 - 4\frac{\sin(\Delta\varphi)}{\frac{1}{p}+p}^2}}}$$

- Sentido de giro: Se determina con el signo de la derivada temporal de $\Delta$ o el de $\operatorname{tg}\Delta$

### Casos especiales: polarización lineal y polarización circular

Respecto a la polarización de los campos, hay dos casos particulares a destacar: La polarización lineal y la circular.

- Polarización lineal:

$$\begin{aligned} p &= 0 \qquad\qquad \text{o} \qquad\qquad p = \infty \\ \Delta\varphi &= 0 \qquad\qquad \text{o} \qquad\qquad \Delta\varphi = \pm\pi \end{aligned}$$

- Polarización Circular:

$$p = 1$$
$$\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

### Elementos para el control de la polarización

Dada una onda, existen elementos para modificar su polarización de la manera que se precise. Los dos más importantes son:

- **Polarizador:** Solo deja pasar una dirección concreta.

$$E_{out} = (E_{in} \cdot \hat{s})\hat{s}$$

- **Láminas de retardo:** Transforma la polarización sin alterar la potencia. Dados los ejes $\hat{s}_1, \hat{s}_2$:

$$E_{out} = (E_{in} \cdot \hat{s}_1)\hat{s}_1 e^{-jkn_0 d} + (E_{in} \cdot \hat{s}_2)\hat{s}_2 e^{-jkn_e d}$$

El desfase generado es:

$$\Delta\varphi_{lam} = k(n_0 - n_e)d$$

Dos casos particulares son las láminas $\frac{\lambda}{4}$, que generan un desfase de $\frac{\pi}{2}$ y las láminas $\frac{\lambda}{2}$, que generan un desfase de $\pi$.

## 3.4. Propagación de ondas planas uniformes en medios con pérdidas

### Permitividad y permeabilidad complejas

En el caso de los medios lineales y homogéneos, es posible generalizar el concepto de $\varepsilon$ y $\mu$ a valores complejos que dependan de la posición y la frecuencia, sin modificar la hipótesis de linealidad antes empleada. Entonces:

$$\varepsilon_i(r,\omega) = \varepsilon_i'(r,\omega) - j\varepsilon_i''(r,\omega)$$
$$\mu(r,\omega) = \mu'(r,\omega) - \mu''(r,\omega)$$

### Ondas planas uniformes en un medio con pérdidas

Aplicando las ecuaciones de Maxwell al caso generalizado anterior, nos aparecen otras constantes (antes consideradas reales), en forma compleja. Dicho cambio se debe a imponer las ecuaciones de Maxwell y determinar cómo heredan las nuevas constantes la parte imaginaria de la $\varepsilon$. Consideraciones importantes son:

- La constante de onda es $k = \beta - j\alpha$, siendo $\beta$ la *constante de propagación* y $\alpha$ la *constante de atenuación*.
- Las nuevas expresiones del campo eléctrico y magnético en forma fasorial es:

$$E(r) = E_c e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$
$$H(r) = H_c e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

- La nueva velocidad de propagación de fase $v_p = \frac{\omega}{\beta}$ y la nueva longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.
- El cálculo del vector de Ponting también se ve afectado por $\alpha$ y $\beta$. El resultado a destacar es $P(z+\Delta z) < P(z)$, por lo que deducimos que se disipa potencia en el medio.

### Casos límite: buen dieléctrico y buen conductor

En este último apartado analizaremos dos casos muy comunes de materiales. Utilizaremos los resultados obtenidos en la sección anterior para extraer algunas conclusiones.

**Definición.** Decimos que un material es un *buen dieléctrico* cuando $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = tan(\delta) << 1$.

Notemos que la $tan(\delta)$ está directamente relacionada con la potencia disipada, por lo que un buen dielétrico genera una poca pérdida de potencia de la onda. Observemos también que $\beta << \alpha$ y entonces la atenuación es poco apreciable en los primeros ciclos de onda.

**Definición.** Decimos que un material es un *buen conductor* cuando $\sigma >> \omega\varepsilon_i'$ y $\sigma >> \omega\varepsilon_i''$.

Esta definición se traduce en:

$$k = \frac{1-j}{\delta_p} \qquad \delta_p = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}}$$
$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta_p} \qquad \lambda = 2\pi\delta_p$$

# 4. Incidencia de ondas planas sobre medios materiales

## 4.1. Introducción. Condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell

De las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en medios lineales, homogéneos, isótropos e indefinidos (sin cargas ni corrientes) surgen las ondas planas. Para estudiar que tipo de ondas aparecen cuando existen cargas, dividimos el espacio en dos regiones:

- La *Región 1*, en la que se encontrarán las cargas,
- y la *Región 2*, que será una región ideal (con todas las condiciones necesarias).

Para estudiar las ondas que se generarán en la *Región 2*, tan solo hace falta aplicar las siguientes condiciones de contorno:

$$\widehat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_S = 0 \quad (1) \qquad \widehat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_S = \sigma \quad (2)$$

$$\widehat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\Big|_S = 0 \quad (3) \qquad \widehat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_S = \vec{J}_S \quad (4)$$

Donde $S$ es la superficie de separación, y $n$ es su vector normal unitario dirigido hacia la *Región 2*. En régimen senoidal permanente, basta comprobar (1) y (4), ya que implican las otras dos ecuaciones.

## 4.2. Incidencia normal sobre conductores perfectos

### Reflexión en la superficie de un conductor perfecto

En un conductor eléctrico, $\vec{E} = 0$ ya que se alcanza la situación de equilibrio electroestático de forma instantánea. Por tanto, no habrá ondas en el conductor eléctrico. Dado que las ondas que inciden en el conductor causan un flujo de energía, y dado que este flujo no puede seguir a través del conductor, aparece la reflexión. Las 4 ecuaciones quedan reducidas a:

$$\widehat{n} \times \vec{E}\Big|_S = 0 \qquad \widehat{n} \cdot \vec{D}\Big|_S = \sigma \qquad \widehat{n} \cdot \vec{B}\Big|_S = 0 \qquad \widehat{n} \times \vec{H}\Big|_S = \vec{J}_S$$

Que junto con la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 \vec{E}_1 + k_1^2 \vec{E}_2 = 0,\ \ k_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$, nos proporcionan los resultados:

- *Onda incidente con polarización lineal* (perpendicular a la superficie del conductor, con la dirección del campo eléctrico en la dirección $y$):

$$\left.\begin{array}{r} \vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cdot e^{-j\vec{k}_i \vec{r}} \\ \vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} \cdot \widehat{k}_i \times \vec{E}_i(\vec{r}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{E}_r(\vec{r}) = -E_{0i} \cdot \widehat{y} \cdot e^{jkz} \\ \vec{H}_r(\vec{r}) = -\frac{E_{0i}}{\eta} \cdot \widehat{x} \cdot e^{jkz} \end{array}\right.$$

  Donde $\vec{k}_i = k \cdot \widehat{k}_i = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \cdot \widehat{z},\ \ \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$. Bajo estas condiciones, la onda reflejada viaja en la misma dirección pero en sentido opuesto ($\widehat{k}_r = \widehat{z}$), y se cumple que $E_{0r} = -E_{0i}$ (ya que el campo eléctrico en el conductor es nulo). Además, en el conductor se induce una corriente superficial: $\vec{J}_S = 2\frac{E_{oi}}{\eta} \cdot \widehat{y}$, y la distribución de carga inducida es nula, $\sigma = 0$[1].

- *Onda incidente con polarización arbitraria*

  Se puede descomponer la onda en dos ondas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales. Dado que el problema tiene simetría circular, se cumplen las mismas propiedades. Observemos que la reflexión introduce un cambio en el sentido de giro según el convenio adoptado: $\widehat{k} = \widehat{e}_1 \times \widehat{e}_2$, ya que la reflexión hace que se intercambien los vectores $\widehat{e}_1$ y $\widehat{e}_2$.

### Ondas estacionarias

En el dieléctrico (*Región 1*), la suma de la onda incidente y la reflejada es $\vec{E}(z) = -2j \cdot E_{oi} \cdot \widehat{y} \cdot \sin kz$, cuyos campos eléctrico y magnético instantáneos son:

$$\left\{\begin{array}{r} \vec{\mathcal{E}}(z,t) = \mathfrak{Re}\Big[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\Big] = 2E_{0i} \cdot \widehat{y} \cdot \sin kz \cdot \sin\omega t \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \mathfrak{Re}\Big[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}\Big] = -2\widehat{x} \cdot \frac{E_{0i}}{\eta} \cdot \cos kz \cdot \cos\omega t \end{array}\right.$$

El campo representado por estas expresiones no se desplaza con el tiempo, por lo que no permiten el transporte de potencia o información.

Un caso particular de ondas estacionarias se da en las *cavidades resonantes* (dieléctrico entre dos placas conductoras paralelas), en el que solo se generan ondas estacionarias con frecuencias $f = m\frac{\nu}{2d}$, donde $d$ es la distancia entre las placas, y $m \in \mathbb{N}$. Estas frecuencias son llamadas *frecuencias de resonancia*.

## 4.3. Incidencia normal sobre medios dieléctricos

### Reflexión y transmisión en la superficie de un medio dieléctrico

Su origen está en las cargas y corrientes ligadas al medio. Sea $W$ el flujo de potencia de una onda, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ la impedancia intrínseca del método, $k = \omega\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$, y $n = \frac{c}{v}$ el índice de refracción del medio. Si el medio es no magnético ($\mu = 1$), tenemos que $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. Entonces, si una onda incidente ortogonal a la superfície induce una onda reflejada y otra transmitida a través de la superfície (ambas conservando la dirección; la reflejada invirtiendo el sentido, y la transmitida conservándolo).

$$\left.\begin{array}{r} \vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cdot \widehat{y} \cdot e^{-jk_1 z} \\ \vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{E_{oi}}{\eta_1} \cdot \widehat{x} \cdot e^{-jk_1 z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{E}_r(\vec{r}) = E_{or} \cdot \widehat{y} \cdot e^{jk_1 z} \\ \vec{H}_r(\vec{r}) = \frac{E_{0r}}{\eta_1} \cdot \widehat{x} \cdot e^{jk_1 z} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \vec{E}_t(\vec{r}) = E_{0t} \cdot \widehat{y} \cdot e^{-jk_2 z} \\ \vec{H}_t(\vec{r}) = -\frac{E_{0t}}{\eta_2} \cdot \widehat{x} \cdot e^{-jk_2 z} \end{array}$$

Donde se tiene que $E_{0r} = \rho \cdot E_{0i}$ y $E_{0t} = \tau \cdot E_{0i}$, y se cumple que:

$$\left.\begin{array}{r} 1 + \rho = \tau \\ 1 - \rho = \tau\frac{\eta_2}{\eta_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{array}\right.$$

Donde esta última relación ($\rho$ y $\tau$ en función de $n_1$ y de $n_2$) es cierta sólo en medios no magnéticos.

[1] En general, para ondas con incidencia oblicua, esto último no es cierto.

### Ondas parcialmente estacionarias

**Definición.** La reflectividad en la superficie es $R = \frac{|\vec{P}_r|}{|\vec{P}_i|} = |\rho|^2$, y la transmitividad es $T = \frac{|\vec{P}_t|}{|\vec{P}_i|} = |\tau|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2}$.

Dado que $W_i + W_r = W_t$ (donde $W_r$ es negativa), tenemos que $R + T = 1$. Además, $0 \leq R \leq 1,\ 0 \leq T \leq 1$.
El campo eléctrico presente en la *Región 1* es:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \ldots = \tau \cdot E_{0i} \cdot e^{-jk_1 z} \cdot \widehat{y} + 2j \cdot \rho \cdot E_{0i} \cdot \widehat{y} \cdot \sin k_1 z$$

Una onda como la representada por dicha expresión recibe el nombre de *onda parcialmente estacionaria*. Este tipo de ondas queda caracterizada por la *Relación de Onda Estacionaria* (ROE, o SWR sus iniciales inglesas),

$$S = \frac{\mathcal{E}_{l_{max}}}{\mathcal{E}_{l_{min}}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}.$$

## 4.4. Incidencia oblicua sobre conductores perfectos

### Planteamiento del problema

**Definición.** Sea el *plano de incidencia* el plano formado por la normal a la superficie $\vec{n}$ y el vector de propagación de la onda incidente $\vec{k}_i$. Sea $\theta_i$ el ángulo de incidencia el formado entre $\vec{n}$ y $\vec{k}_i$. Sea $\theta_r$ el ángulo de propagación, que es el formado entre $\vec{n}$ y $\vec{k}_r$.

Fijemos el eje $Z$ como el normal a la superficie (creciente hacia la *Región 2*), el eje $Y$ tangente a la superficie contenido en el plano de incidencia, y el eje $X$ ortogonal a los otros dos.
De esta manera, el vector de propagación cumple: $\vec{k}_i = k \cdot \widehat{k}_i = k \cdot (\widehat{y} \sin\theta_i + \widehat{z}\cos\theta_i)$, donde $k$ es la constante de propagación de la onda en el dieléctrico.
Descomponemos la onda incidente en dos: una onda polarizada linealmente con la dirección del campo eléctrico paralelo al plano de incidencia, y otra onda polarizada linealmente con el campo eléctrico perpendicular:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}i\perp \qquad\qquad \vec{H}_i = \vec{H}_{i\parallel} + \vec{H}_{i\perp}$$

Estudiaremos los dos casos por separado:

- Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_{i\parallel} = 0 \\ \vec{E}_{i\perp} = E_{0i\perp} \cdot \widehat{x} \cdot e^{-jk(y\sin\theta_i + z\cos\theta_2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_r = \theta_i \\ \vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = -E_{0i\perp} \cdot \widehat{x} \cdot e^{-jk(y\sin\theta_i - z\cos\theta_2)} \end{array}\right.$$

  Y se tiene que $\vec{k}_r$ está contenido en el plano de incidencia.

- Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_{i\parallel} = E_{0i\parallel} \cdot (\widehat{y}\cos\theta_i - \widehat{z}\sin\theta_i) \cdot e^{-jk(y\sin\theta_i + z\cos\theta_2)} \\ \vec{E}_{i\perp} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_r = \theta_i \\ \vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}) = -E_{0i\parallel} \cdot (\widehat{y}\cos\theta_i + \widehat{z}\sin\theta_i) \cdot e^{-jk(y\sin\theta_i - z\cos\theta_2)} \end{array}\right.$$

### Ondas estacionarias mixtas

Volveremos a estudiar dos casos de forma separada:

- Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia:

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \vec{E}_{i\perp}(\vec{r}) + \vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = -2j \cdot E_{0i\perp} \cdot \widehat{x} \cdot \sin kz\cos\theta_i \cdot e^{-jky\sin\theta_i}$$

$$\vec{H}_\perp = \vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) + \vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) = 2\frac{E_{0i\perp}}{\eta}\Big[\widehat{y}\cos\theta_i\cos(kz\cos\theta_i) + j\widehat{z}\sin\theta_i\sin(kz\cos\theta_i)\Big]e^{-jky\sin\theta_i}$$

  Definiendo, para simplificar, $\vec{k}_i = k \cdot (\widehat{y}\sin\theta_i + \widehat{z}\cos\theta_i)$, tenemos que:

$$\mathcal{E}_\perp(\vec{r}, t) = -2E_{0i\perp} \cdot \widehat{x} \cdot \sin(\omega t - k_{iy} y)$$

$$\begin{array}{rl} \mathcal{H}_\perp(\vec{r}, t) = & 2\widehat{y}\frac{E_{0i\perp}}{\eta}\cos\theta_i \cdot \cos(k_{iz}) \cdot \cos(\omega t - k_{iy}y) \\ & +2\widehat{z}\frac{E_{0i\perp}}{\eta}\sin\theta_i\sin(k_{iz}z)\sin(\omega t - k_{iy}y) \end{array}$$

- Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia:

$$\vec{E}_\parallel(\vec{r}) = -2E_{0i\parallel}\Big[j\widehat{y}\cos\theta_i\sin(kz\cos\theta_i) + j\widehat{z}\sin\theta_i\cos(kz\cos\theta_i)\Big]e^{-jky\sin\theta_i}$$

$$\vec{H}_\parallel = -2\frac{E_{0i\parallel}}{\eta}\widehat{x}\cos(kz\cos\theta_i)e^{-jky\sin\theta_i}$$

  Se obtienen expresiones parecidas para $\mathcal{E}_\parallel$ y $\mathcal{H}_\parallel$, que no tienen mayor interés.

Si nos fijamos un $y_0$, y nos movemos a lo largo del eje $Z$, observamos que se obtiene un comportamiento análogo al de la onda estacionaria. Los nodos $z_m$ vienen dados ahora por $k_{iz}z_m = m\pi$, donde $m \in \mathbb{N}$ y $k_{iz} = k\cos\theta_i$.

Las distribuciones de carga, $\sigma$, y las corrientes inducidas, $\vec{J}_S$, son:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \sigma & = & 0 & + & 2\varepsilon \cdot E_{0i\parallel} \cdot \sin\theta_i \cdot e^{-jk_{iy}y} \\ \vec{J}_S & = & 2 \cdot \frac{E_{0i\perp}}{\eta} \cdot \widehat{x} \cdot \cos\theta_i \cdot e^{-jk_{iy}y} & + & 2 \cdot \frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \cdot \widehat{y} \cdot e^{-jk_{iy}y} \end{array}\right.$$

## 4.5. Incidencia oblicua sobre dieléctricos

### Leyes de Snell para la reflexión y la refracción de ondas planas

**Definición.** Sean $\theta_i$, $\theta_r$, $\theta_t$ los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión respectivamente.

- La primera Ley de Snell nos dice que las ondas reflejadas y transmitidas (o refractadas) están contenidas en un mismo plano.
- La segunda Ley de Snell indica que los ángulos de incidencia y reflexión coinciden: $\theta_i = \theta_r$.
- La tercera Ley de Snell indica que se cumple la siguiente relación: $k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t$. También se puede escribir como $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$.

### Ecuaciones de Fresnel

Una vez más, descomponemos la onda en dos ondas polarizadas linealmente ortogonales, y estudiamos los casos por separado:[2]

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}i\perp \qquad\qquad \vec{H}_i = \vec{H}_{i\parallel} + \vec{H}_{i\perp}$$

- Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia: La onda incidente es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_{i\perp}(\vec{r}) = E_{0i\perp} \cdot \widehat{x} \cdot e^{-jk_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) = \frac{E_{0i\perp}}{\eta_1} \cdot (\widehat{y}\cos\theta_i - \widehat{z}\sin\theta_i) \cdot e^{-jk_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \end{array}\right.$$

  Escribimos las ecuaciones de los campos para las ondas reflejadas y transmitidas como:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = E_{0r\perp} \cdot \widehat{x} \cdot e^{-jk_1(y\sin\theta_r + z\cos\theta_r)} \\ \vec{H}_r(\vec{r}) = \vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) = -\frac{E_{0r\perp}}{\eta_1} \cdot (\widehat{y}\cos\theta_r + \widehat{z}\sin\theta_r) \cdot e^{-jk_1(y\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{t\perp}(\vec{r}) = E_{0t\perp} \cdot \widehat{x} \cdot e^{-jk_1(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \\ \vec{H}_t(\vec{r}) = \vec{H}_{t\perp}(\vec{r}) = \frac{E_{0t\perp}}{\eta_2} \cdot (\widehat{y}\cos\theta_t - \widehat{z}\sin\theta_t) \cdot e^{-jk_2(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \end{array}\right.$$

  Y de las leyes de Snell se obtienen las siguientes igualdades:

$$E_{0r\perp} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} E_{0i\perp}$$

$$E_{0t\perp} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} E_{0i\perp}$$

- Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia: Análogamente, tenemos expresados los campos de las tres ondas (incidente, reflejada, transmitida) como:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel}(\vec{r})(\widehat{y}\cos\theta_i - \widehat{z}\sin\theta_i)e^{-jk_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_i = \vec{H}_{i\parallel}(\vec{r}) = -\frac{E_{0i\parallel}}{\eta_1}\widehat{x}e^{-jk_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}_r = \vec{E}_{r\parallel}(\vec{r})(\widehat{y}\cos\theta_r + \widehat{z}\sin\theta_r)e^{-jk_1(y\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \\ \vec{H}_r = \vec{H}_{r\parallel}(\vec{r}) = \frac{E_{0r\parallel}}{\eta_1}\widehat{x}e^{-jk_1(y\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}_t = \vec{E}_{t\parallel}(\vec{r})(\widehat{y}\cos\theta_t - \widehat{z}\sin\theta_t)e^{-jk_2(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \\ \vec{H}_t = \vec{H}_{t\parallel}(\vec{r}) = -\frac{E_{0t\parallel}}{\eta_2}\widehat{x}e^{-jk_2(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \end{array}\right.$$

  Donde se cumple que:

$$E_{0r\parallel} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} E_{0i\parallel}$$

$$E_{0t\parallel} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} E_{0i\parallel}$$

[2] Recordemos que la polarización de las ondas reflejada y transmitida son la misma que la de la onda incidente.

- Onda incidente con polarización arbitraria: Tan solo hace falta descomponer la onda según dos direcciones ortogonales (una contenida en el plano de incidencia, y la otra ortogonal), para obtener que:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r\parallel} + \vec{E}_{r\perp} = (\rho_\parallel E_{0i\parallel}\widehat{e}_{r\parallel} + \rho_\perp E_{0i\perp}\widehat{e}_{r\perp})e^{-j\vec{k}_r\vec{r}}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t\parallel} + \vec{E}_{t\perp} = (\tau_\parallel E_{0i\parallel}\widehat{e}_{t\parallel} + \tau_\perp E_{0i\perp}\widehat{e}_{t\perp})e^{-j\vec{k}_t\vec{r}}$$

  Donde se tiene que:

$$\begin{cases} \rho_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} & \rho_\parallel = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \\ \tau_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} & \tau_\parallel = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \end{cases}$$

  Para el cálculo de los coeficientes $\rho$ y $\tau$, podemos tener en cuenta las siguientes igualdades:

$$1 + \rho_\perp = \tau_\perp \qquad\qquad 1 - \rho_\parallel = \frac{\eta_1}{\eta_2}\tau_\parallel$$

  Además, en medios no magnéticos, podemos utilizar que $\eta_1 = \frac{\eta_0}{n_1}$, $\eta_2 = \frac{\eta_0}{n_2}$, para obtener las expresiones:

$$\begin{cases} \rho_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} & \rho_\parallel = \frac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i} \\ \tau_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} & \tau_\parallel = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i} \end{cases}$$

También podemos definir aquí los conceptos de reflectividad $R$ y transmitividad $T$:

$$R = \frac{|P_{rz}|}{|P_{iz}|} = |\rho|^2 \qquad\qquad T = \frac{|P_{tz}|}{|P_{iz}|} = |\tau|^2\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}$$

### Ángulo de Brewster

**Definición.** El *ángulo de Brewster* es aquel en que la ondas que inciden con dicho ángulo se transmiten totalmente (es decir, tienen reflexión nula).

Haremos el estudio para medios no magnéticos, y separando nuevamente en casos:

- Onda incidente con polarización paralela paralela al plano de incidencia: Según las leyes de Fresnel, la condición de reflexión nula es: $n_1\cos\theta_t = n_2\cos\theta_i$. Combinándola con la tercera ley de Snell, obtenemos que:[3]

$$\sin\theta_{iB} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}} \iff \theta_{iB} = \operatorname{arc\,tg}\frac{n_2}{n_1}$$

- Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia: Según las leyes de Fresnel, se debe cumplir que $n_1\cos\theta_i = n_2\cos\theta_t$, que junto con la tercera ley de Snell obliga a que $n_1 = n_2$, con lo que obtenemos que sólo existe ángulo de Brewster si no hay cambio de medio, por lo que cualquier onda que cambie de medio reflejará una parte.
- Onda incidente con polarización lineal arbitraria: Basta aplicar superposición para ver que si la onda tiene componente perpendicular al plano de incidencia, no existirá ángulo de Brewster. En caso contrario, nos encontramos en el primer caso.

### Ángulo crítico. Reflexión total en un dieléctrico

El valor límite para el que $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ es, según la tercera ley de Snell,

$$\theta_{ic} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

A éste valor, $\theta_{ic}$, se le conoce como el *ángulo crítico de la superfície*. Cuando una onda incide con un ángulo $\theta_i \geq \theta_{ic}$, toda la potencia es reflejada en dos ondas (la reflejada y la "transmitida", que en este caso, dado que $\theta_t \geq \frac{\pi}{2}$, también está contenida en la *Región 1*).

[3]Cabe destacar que en este casi siempre existirá el ángulo de Brewster.

## 4.6. Incidencia sobre un buen conductor

Consideraremos la incidencia de ondas sobre un material buen conductor (pero no sobre un conductor ideal). En este contexto, *las Leyes de Snell y las Leyes de Frenel siguen siendo válidas*, pero se observa una disminución en la amplitud de las ondas que atraviesan estos materiales.

Si incide una onda con campo eléctrico $\vec{E}_i$, la onda transmitida tiene el campo eléctrico $\vec{E}_t(\vec{r}) \approx \vec{E}_t(z)e^{-jk_1 y \sin\theta_1}$, donde $\vec{E}_t(z)$ corresponde a la expresión obtenida en un conductor ideal. De hecho, dado que el medio es casi conductor ideal, la disminución de amplitud en $z$ es mucho mayor que la disminución de amplitud en $y$, lo que hace que la onda se propage paralelamente a la superficie. Esto se conoce como el *efecto skin*.

La potencia que atraviesa la superficie es $|\vec{P}_t(z)| = \frac{\sigma\delta_p}{4}|\vec{E}_{0t}|^2 e^{-\frac{2z}{\delta_p}}$. El resto se pierde en forma de pérdidas óhmicas.

La transmitividad $T$ se calcula como $T = \frac{\sigma\delta_p\eta_1}{2\cos\theta_i}|\tau|^2$.

## 4.7. Incidencia normal en multicapas

Estudiaremos sistemas con 3 o más medios. En ellos, al incidir una onda, además de reflejarse de la primera y transmitirse hasta la última, se va transmitiendo y reflejando entre los medios intermedios infinitas veces. Aplicando superposición, estudiaremos un modelo equivalente simplificado: dos ondas en cada medio: una progresiva y una regresiva (hacia adelante y hacia atrás, respectivamente), excepto en el último, donde sólo hay onda progresiva.

### Impedancia de onda generalizada

**Definición.** La *impedancia de onda* es $Z_{ij} = \frac{E_i}{H_j}$. Es una función contínua siempre (tanto dentro de un medio como en las superficies de separación.

Para el caso de una onda tipo TEM (transversal electromagnética) los campos $E$ y $H$ tienen una única componente, y la impedancia de onda es $Z = \pm\frac{E}{H}$, donde el signo se escoge de forma que, para el caso de una onda plana uniforme, coincida con la impedancia intrínseca del medio, con signo positivo.

### Coeficiente de reflexión generalizado

**Definición.** En un medio donde se propagan dos ondas planas, una progresiva (con dirección $\widehat{k} = \widehat{z}$ y campo eléctrico $E^+(z)$) y otra regresiva($\widehat{k} = \widehat{z}$, y $E^-(z)$), se define el *coeficiente de reflexión generalizado* como: $\Gamma(z) = \frac{E^-(z)}{E^+(z)}$. Es una función continua en un medio, pero presenta discontinuidades en las superficies de separación.

Dado que las ondas son planas, y escogiendo un $z_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario,

$$\Gamma(z) = \frac{E_0^- e^{jkz}}{E_0^+ e^{-jkz}} = \frac{E_0^-}{E_0^+}e^{2jkz}, \qquad \Gamma_0 = \Gamma(z_0) = \frac{E_0^-}{E_0^+}e^{2jkz_0} \Rightarrow \Gamma(z) = \Gamma(z_0)e^{2jk(z-z_0)}$$

Notemos que la *impedancia de onda* en el caso con las ondas progresiva y regresiva es $Z(z) = \frac{E^+(z)+E^-(z)}{H^+(z)+H^-(z)}$. Dado que $H^-(z) = -\Gamma H^+(z) \Rightarrow Z(z) = \eta\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$. La relación inversa es $\Gamma(z) = \frac{Z(z)-\eta}{Z(z)+\eta}$.

Gracias a estas relaciones y a las continuidades de las funciones ($Z(z)$ en los saltos y $\Gamma$ en el interior de un medio), podemos calcular $\Gamma(z)$ y $Z(z)$ en cualquier del sistema conociéndolo tan solo en un punto concreto.

# 5. Guías de Onda

## 5.1. Guías conductoras de sección rectangular

Las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético son respectivamente:

$$\nabla^2\vec{E} = -\omega^2\mu\varepsilon\vec{E} \qquad \nabla^2\vec{H} = -\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}$$

El tipo de soluciones que buscamos para las ecuaciones anteriores se escribe en forma fasorial:

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y)e^{-j\beta z} \qquad \vec{H}(x,y,z) = H(x,y)e^{-j\beta z}$$

donde $\beta$ es la llamada *constante de propagación*. A una solución del tipo anterior se la denomina *modo de propagación de la guía* y se caracteriza porque su fase depende linealmente de $z$, dirección de propagación. Sustituyendo estas soluciones en las respectivas ecuaciones de onda resulta:

$$\nabla_t^2\vec{E} + (\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)\vec{E} = 0 \qquad \nabla_t^2\vec{H} + (\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)\vec{H} = 0$$

Mediante cierta manupulación matemática se pueden obtener las siguientes relaciones entre las componentes transversales y longitudinales de los campos:

$$
\begin{aligned}
(\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)E_x &= -j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y} - j\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} \\
(\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)E_y &= +j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta\frac{\partial E_z}{\partial y} \\
(\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)H_x &= +j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - j\beta\frac{\partial H_z}{\partial x} \\
(\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)H_y &= -j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta\frac{\partial H_z}{\partial y}
\end{aligned}
$$

De las anteriores obtenemos dos ecuaciones desacopladas para las componentes longitudinales:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2\right) E_z = 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2\right) H_z = 0
\end{aligned}
$$

## Modos de tipo transversal eléctrico (TE)

En este caso la componente longitudinal del campo eléctrico es nula. La componente longitudinal del campo magnético puede expresarse de la forma:

$$H_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

Utilizando la ecuación del campo magnético obtenemos que se debe cumplir en todos los casos la igualdad:

$$-k_x^2 - k_y^2 + \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2 = 0$$

Las soluciones generales de las ecuaciones son:

$$
\begin{aligned}
X(x) =& A\sin k_x k + B\cos k_x x \\
Y(y) =& C\sin k_y y + D\cos k_y y
\end{aligned}
$$

Si aplicamos las condiciones de contorno:

$$
\begin{aligned}
H_x\Big|_{x=0,x=a} = 0 \quad &\rightarrow \quad A = 0,\ k_x = \frac{m\pi}{a} \\
H_y\Big|_{y=0,y=b} = 0 \quad &\rightarrow \quad C = 0,\ k_y = \frac{n\pi}{b}
\end{aligned}
$$

La expresión de la componente longitudinal es:

$$H_z(x,y) = H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}\right)$$

donde la ampitud $H_0 = BD$.

Con respecto a la constante de propagación,

$$\beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

donde $k = \omega^2\mu\varepsilon$. Esta relación recibe el nombre de *relación de dispersión* en la guía.

Para los modos TE tenemos:

$$
\begin{aligned}
E_x(x,y) = -j\omega\mu\frac{\frac{n\pi}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \frac{\omega\mu}{\beta}H_y \\
E_y(x,y) = j\omega\mu\frac{\frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = -\frac{\omega\mu}{\beta}H_x
\end{aligned}
$$

## 5.2. Modos de tipo transversal magnético (TM)

En este caso la componente longitudinal del campo magnético es nula. Buscamos soluciones para el campo eléctrico de la forma:

$$E_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

De nuevo aplicando las condiciones de contorno llegamos a la expresión general:

$$E_z(x,y) = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)$$

y se satisfacen las relaciones:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad k_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad \beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

Para las demás componentes:

$$H_x(x,y) = -j\omega\varepsilon\frac{\frac{n\pi}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = -\frac{\omega\varepsilon}{\beta}E_y$$

$$H_y(x,y) = j\omega\varepsilon\frac{\frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \frac{\omega\varepsilon}{\beta}E_x$$

### Modos guiados y modos de corte. Curvas de dispersión

La constante de propagación se mantendrá real siempre que:

$$\omega^2\mu\varepsilon \geq \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

Si el par $m, n$ son tales que la condición anterior no se satisface, entonces $\beta$ pasa a ser un valor imaginario puro de la forma:

$$\beta_{m,n} = \pm j\alpha_{m,n}$$

y el término de propagación del modo $e^{-j\beta z}$ se convierte en un término de atenuación $e^{-\alpha z}$. Existe un frecuencia mínima que permite que un modo se propague en la guía, y se denomina *frecuencia de corte* del modo. Un modo con constante de propagación imaginaria es conocido como *modo en corte*. Los modos usuales, en los que $\beta$ es real, son capaces de transmitir información a través de la guía y se conocen como *modos guiados*.

La frecuencia de corte de un modo puede escribirse como:

$$f^c_{m,n} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y es la frecuencia mínima a la que el modo puede propagarse.

La constante de propagación puede expresarse en función de la frecuencia de corte:

$$\beta_{m,n} = 2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 - \left(\frac{f^c_{m,n}}{f}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

La *longitud de onda en la guía* se define como la distancia entre dos planos de fase consecutivos:

$$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi}{\beta_{m,n}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f^c_{m,n}}{f}\right)^2}}$$

Para una frecuencia fijada, la *velocidad de fase* de un modo viene dada por:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_{m,n}}$$

### Modo dominante $TE_{10}$

Se denomina *modo dominante* o *modo fundamental* de la guía de onda a aquel cuya frecuencia de corte es menor. Si asumimos que las dimensiones transversales de la guía cumplen la relación $a > b$, podemos ver que el modo de menor frecuencia de corte es el de orden 10. Se comprueba, además, que los modos TM comienzan en el modo $TM_{11}$ (en general no son posibles los modos $TM_{m0}$ ni los $TM_{n0}$) por lo que el modo fundamental es el modo $TE_{10}$.

### Potencia transmitida

Sabemos que en las direcciones transversales la situación es estacionaria y por ello no puede haber ningún flujo neto de potencia.

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2}\mathtt{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_m = \frac{1}{2}\mathtt{Re}\left(E_x H_y^* - H_x^* E_y\right)\hat{z}$$

Para los modos TE y TM se cumplen las relaciones:

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_{m,n} \qquad\qquad \frac{E_y}{H_x} = -Z_{m,n}$$

por ello, podemos escribir la densidad de potencia como:

$$\vec{P}_{m,n} = \frac{1}{2}\frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{Z_{m,n}}\hat{z}$$

La potencia media transportada se obtiene, finalmente, como la integral del flujo del vector de Poynting a través de una sección cualquiera de la guía:

$$W_{m,n} = \int_{y=0}^{y=b}\int_{x=0}^{x=a} \vec{P}_{m,n}\cdot\hat{z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

### Atenuación

La permitividad de un dieléctrico real debe escribirse en la forma $\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$, donde $\varepsilon$ es la permitividad del material sin pérdidas y $\sigma$ su conductividad efectiva. Por otro lado, se define la impedancia superficial de un conductor no perfecto como:

$$Z_s = R_s + jX_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j)$$

Introduciendo las expresiones anteriores, para un modo $\mathrm{TE}_{mn}$ o $\mathrm{TM}_{mn}$ la constante de propagación será ahora:

$$\beta_{m,n} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]}$$

Supondremos que se cumple:

$$\frac{\sigma\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]} \ll 1$$

Mediante el desarrollo de Taylor y la aproximación anterior llegamos a:

$$\beta_{m,n} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]} - j\frac{\sigma\omega\mu}{2}\left[\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]\right]^{-\frac{1}{2}}$$

El término imaginario de $\beta$ provoca la aparición de un término de atenuación en la dirección de $z$, del tipo $e^{-j\alpha_{m,n}z}$. La expresión de $\alpha_{m,n}$ es:

$$\alpha_{m,n} = \frac{\sigma}{2}\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1-\frac{f_{c(mn)}^2}{f^2}}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma\eta}{\sqrt{1-\frac{f_{c(mn)}^2}{f^2}}}$$

donde $\eta$ es la impedancia intrínseca del medio sin pérdidas. Por otro lado, $\alpha_{m,n}$ recibe el nombre de constante de atenuación del medio para pérdidas dieléctricas.

### Pérdidas óhmicas o de conducción

La potencia $W_c$ absorbida y disipada en forma de calor en cada una de las cuatro superficies de la guía se calcula utilizando una fórmula análoga a la de la teoría de circuitos:

$$W_c = \frac{1}{2}RI^2$$

donde $R = R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$. Si denominamos $\vec{J}_s$ a la densidad de corriente superficial, entonces:

$$W_c = \frac{R_s}{2}\int_{S_i} \vec{J}_{S_i}\vec{J}^*_{S_i}\mathrm{d}S_i$$

con $\vec{J}_{S_i} = \hat{n} \times \vec{H}\Big|_{S_i}$. Además, si $W_0$ corresponde a la potencia transportada en un punto $p_0$ de la guía, entonces la potencia transportada en $p_0 + z$ es:

$$W(z) = W_0 \exp(-2\alpha_c z)$$

Mediante algunos cálculos llegamos a:

$$\alpha_c \approx \frac{|W_c|_{z=l}}{2W_0 l}$$

## 5.3. Guías conductoras de sección circular

### Modos TM

Si se aplica la ecuación de onda a la componente longitudinal ($E_z$) del campo eléctrico tenemos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2} = -(\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)E_z$$

con

$$E_z = E_z(\rho,\varphi)e^{-j\beta z} = R(\rho)\Phi(\varphi)e^{-j\beta z}$$

Por la simetría de la guía obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + n^2\Phi = 0$$

donde $\alpha^2 = (\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)$. Las soluciones para la $R$ son las funciones de Bessel de orden $n$. La frecuencia de la onda y la constante de propagación del modo se relacionan según la expresión:

$$\omega^2\mu\varepsilon = \beta^2 + \frac{x^2}{a^2}$$

que se conoce como *relación de dispersión* para guías de sección cilíndrica, donde $a$ es el radio interno del conductor.

### Modos TE

El procedimiento para obtener la expresión de los modos es similar al realizado en el caso anterior. En este caso debe tenerse en cuenta:

$$H_z = H_z(\rho,\varphi)e^{-j\beta z} = R(\rho)\Phi(\varphi)e^{-j\beta z}$$

### El cable coaxial. Modos TEM

En una onda TEM las dos componentes longitudinales de los campos son nulas. Si imponemos esa condición en las ecuaciones de Maxwell se obtienen las relaciones:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

Combinando las ecuaciones para los modos de propagación genéricos tenemos:

$$H_y = \frac{\beta}{\omega\mu}E_x = \frac{\omega\varepsilon}{\beta}E_x$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu}E_y = -\frac{\omega\varepsilon}{\beta}E_y$$

donde se cumple $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$. Las expresiones anteriores se pueden reescribir de forma más compacta:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{z} \times \vec{E}$$

donde $\eta$ es la impedancia intrínseca del medio.

La estructura física que permite la existencia de modos de este tipo es el cable coaxial. La ecuación que debemos resolver para encontrar la expresión del campo es:

$$\nabla^2\phi(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) = 0$$

A partir de ella deducimos que los campos eléctrico y magnético valen:

$$\vec{E}(\rho, z) = -\hat{\rho}\frac{E_0}{\rho}\exp(-jkz)$$
$$\vec{H}(\rho, z) = -\hat{\varphi}\frac{E_0}{\eta\rho}\exp(-jkz)$$

La densidad de potencia transportada por la onda la representamos mediante el vector de Poynting, que en este caso vale:

$$\vec{P} = \frac{1}{\eta}|\vec{E}|^2\hat{z}$$

## 5.4. Cavidades resonantes de paredes conductoras

En este caso no existe una dirección en la que se propaga la onda, ya que ésta se encuentra confinada en el interior de un objeto. Deberemos imponer las condiciones de contorno adaptándonos a cada problema particular.

### Factor $Q$ de la cavidad y energía almacenada

El factor $Q$ o de calidad se define por:

$$Q = \omega\frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía disipada por segundo}}$$

La energía electromagnética total almacenada en el interior de la cavidad es:

$$W_T = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon|\vec{E}|^2 + \mu|\vec{H}|^2)\mathrm{d}v$$

Por otro lado, la pérdida total de energía por unidad de tiempo, atendiendo a los efectos óhmicos en el conductor, es:

$$P_T = \frac{1}{2}R_s\int_S \vec{J}_S\cdot\vec{J}_S\mathrm{d}S$$

donde $\vec{J}_S$ es la corriente superficial inducida en las paredes del conductor.

## 5.5. Guías de onda dieléctricas

### Guías dieléctricas planas

Están formadas por tres medios situados en capas, con coeficientes de refracción $n_1, n_2, n_3$.

### Modos TE y modos TM. Curvas de dispersión

**Modos TE** Las ecuaciones para los campos son:

$$\vec{E}_1(x, z) = \hat{y}E_{01}\exp(\alpha_1 x)e^{-j\beta z} \qquad x < -\frac{d}{2}$$
$$\vec{E}_2(x, z) = \hat{y}E_{02}\cos(k_{2x} + \psi)e^{-j\beta z} \qquad |x| \leq \frac{d}{2}$$
$$\vec{E}_3(x, z) = \hat{y}E_{03}\exp(-\alpha_3 x)e^{-j\beta z} \qquad x > \frac{d}{2}$$

Además, se cumplen las relaciones:

$$k_{2x} = \sqrt{\omega^2\mu_2\varepsilon_2 - \beta^2} = \sqrt{k_0^2 n_2 - \beta^2}$$
$$\alpha_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega^2\mu_1\varepsilon_1} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1}$$
$$\alpha_3 = \sqrt{\beta^2 - \omega^2\mu_3\varepsilon_3} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_3}$$

donde $n_1, n_2$ y $n_3$ son los índices de refracción del substrato, la capa guiante y la cubierta, respectivamente y $k_0$ es el número de onda en el vacío.

Después de algunas manipulaciones matemáticas para imponer las condiciones de contorno llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{tg}(k_{2x}\frac{d}{2}+\psi)=\frac{\mu_2\alpha_3}{\mu_3k_{2x}}$$
$$\operatorname{tg}(k_{2x}\frac{d}{2}-\psi)=\frac{\mu_2\alpha_1}{\mu_1k_{2x}}$$

Definimos los desfases:

$$\Phi_3^{TE}=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\mu_2\alpha_3}{\mu_3k_{2x}}\right), \qquad \Phi_1^{TE}=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\mu_2\alpha_1}{\mu_1k_{2x}}\right)$$

de modo que podremos escribir:

$$k_{2x}\frac{d}{2}+\psi=\frac{1}{2}\Phi_3^{TE}\pm p_1\pi, \qquad k_{2x}\frac{d}{2}-\psi=\frac{1}{2}\Phi_1^{TE}\pm p_2\pi$$

Si sumamos las dos anteriores obtenemos la *ecuación de dispersión de la guía dieléctrica plana para modos TE*, junto con las definiciones dadas:

$$2k_{2x}d-\Phi_3^{TE}-\Phi_1^{TE}=2m\pi, \quad m=1,2\dots$$

**Modos TM** Razonando de manera análoga para el caso TM obtenemos las expresiones correspondientes.

**Potencia propagada en una guía dieléctrica** Para calcular la potencia media que transporta un modo guiado que se propaga en la dirección Z asumiremos que la dimensión de la quía en la dirección transversal Y tiene un valor $b$ con $b \gg d$. Se tiene entonces:

$$W_m=\frac{1}{2}\mathtt{Re}\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot\hat{z}\right]\vec{a}$$

### Modos guiados y modos radiados

Los modos radiados aparecen cuando parte de la potencia de la onda que viaja en la guía se pierde en el exterior.

# 6. Radiación de Antenas Elementales

En esta sección trataremos la creación de campos electromagnéticos y la posterior radiación de los mismos de manera muy elemental. Definimos dos conceptos que nos ayudarán a seguir con el desarrollo teórico del tema:

**Definición.** Decimos que el *potencial vector magnético* es el vector $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=B=\mu H$$

**Definición.** Decimos que $\phi$ es el potencial eléctrico si cumple:

$$-\nabla\phi=\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Notemos que esta relación nos servirá para plantear ecuaciones desacopladas. Otra relación entre ambos potenciales la mostramos a continuación.

**Proposición.** La norma de Lorentz define la relación:

$$\nabla\vec{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

## 6.1. Ecuación de onda

Como hemos visto, estos dos conceptos nos dan una vía alternativa para calcular los campos eléctricos y magnéticos. De ahora en adelante nos reduciremos a seguir el desarrollo en base al potencial vector magnético y el potencial escalar eléctrico, dejando en segundo plano los respectivos campos. El primer resultado que encontramos es la ecuación de onda:

**Proposición.** La ecuación de onda que cumplen los potenciales es:

$$\nabla^2 A - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$
$$\nabla^2 \phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Y las respectivas soluciones las podemos escribir como:

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(r', t-t_0)}{|r-r'|}\mathrm{d}v'$$
$$A(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}(r', t-t_0)}{|r-r'|}\mathrm{d}v'$$
$$t_0 = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}|r-r'|$$

## 6.2. Ecuación de onda en RPS

Como en todo el desarrolo anterior nos podemos centrar en los casos de régimen senoidal permanente, y como se ha visto con anterioridad el uso de la notación fasorial hará los cálculos mucho más sencillos. Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación de onda anterior en fasorial y obtenemos:

$$\nabla^2 A + \omega^2\mu_0\varepsilon_0 A = -\mu_0 J$$
$$\nabla^2 \phi + \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Y las soluciones se escribirán como:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(r')e^{-jk_0|r-r'|}}{|r-r'|}\mathrm{d}v'$$
$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}(r')e^{-jk_0|r-r'|}}{|r-r'|}\mathrm{d}v'$$

Por último, añadimos dos relaciones más, la norma de Lorenz y la definición del campo eléctrico en función de los dos potenciales:

$$\nabla A = -j\omega\mu_0\varepsilon_0\phi$$
$$E(r) = -\nabla\phi - j\omega A$$

## 6.3. Dipolo

Consideremos ahora un dipolo centrado en el punto $r_0$ y en dirección unitaria $\hat{u}$. Entonces, el potencial vector magnético creado por el dipolo se escribe como:

$$A(r) = \frac{\mu_0 I_0 h}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}e^{jk\hat{r}r_0}\hat{u}$$

## 6.4. Campos radiados

Una vez obtenido el potencial vector magnético resulta sencillo calcular los campos eléctrico y magnético: el segundo es inmediato y el primero nos lo facilitan las ecuaciones de Maxwell. No obstante, principalmente nos interesa el cálculo del campo a grandes distancias del emisor, que es donde se situará el receptor de la onda. Utilizando la aproximación $kr >> 1$ la expresión para el campo radiado es:

$$E_{rad} = -jw(A_\varphi\hat{\varphi} + A_\theta\hat{\theta}) \tag{1}$$

### 6.4.1. Campos radiados por el dipolo

Calculemos ahora los campos radiados por un dipolo. El resultado es:

$$\vec{E}_{rad}(r) = jk\eta_0\frac{I_0 h}{4\pi}\sin(\theta)\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\theta}$$
$$\vec{H}_{rad}(r) = jk\frac{I_0 h}{4\pi}\sin(\theta)\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\varphi}$$

## 6.5. Características de radiación

Podemos encontrar diferentes características que nos dan información sobre nuestro sistema. Por este motivo resulta interesante conocerlas, ya que puede ser una buena manera de estudiar el sistema que no nos obliga a entrar en cálculos específicos. Calcularemos primero el ya conocido vector de Pointing medio. Usando que: $P_m = \frac{1}{2} Re(E \times H^*)$ entonces obtenemos para el caso del dipolo:

$$P_m = \frac{1}{2} \left( \frac{I_o h}{4\pi} \right)^2 k^2 \eta_0 \left( \frac{\sin(\theta)}{r} \right)^2 \hat{r}$$

**Proposición.** La potencia radiada coincidirá con el flujo del vector de Pointing en una superficie cerrada.

Por ese motivo, podemos tomar una esfera de radio $r$ y obtenemos:

$$P_{rad} = \frac{1}{12\pi} (I_0 h)^2 k^2 \eta_0$$

### 6.5.1. Esquema circuital y resistencia de radiación

El primero de los tres parámetros a considerar en el estudio será el de resistencia de radiación. Si consideramos el sistema como un generador senoidal y una resistencia de pérdidas en la fuente ($R_s$), junto con una segunda resistencia $R_{rad}$ que quiere significar la disipación de potencia hacia el entorno (el campo radiado), el valor de $R_{rad}$ nos dará una idea de la cantidad de potencia que se está disipando en el ambiente. Por lo tanto:

**Definición.** Definimos la resistencia de radiación como:

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I_{eff}^2} \quad \overset{\text{RSP}}{\Longrightarrow} \quad R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2}$$

### 6.5.2. Diagrama de radiación

El segundo parámetro es el diagrama de radiación. Éste se basa básicamente en comprobar en qué dirección de irradia más potencia.

**Definición.** El vector de Pointing normalizado a la unidad se define como:

$$t(\theta, \varphi) = \frac{|P(r, \theta, \varphi)|}{|P(r, \theta, \varphi)|_{\text{máx}}}$$

Entonces, el diagrada de radiación simplemente es la representación de la relación $r = t(\theta, \varphi)$. Normalmente se hace en coordenadas polares.

### 6.5.3. Ganancia directiva y directividad

Por último, el tercer parámetro de estudio es la ganancia directiva y a su vez la directividad.

**Definición.** La *ganancia directiva* es:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{|P(r, \theta, \varphi)|}{\frac{P_{rad}}{4\pi^2}}$$

Notemos que la única diferencia con el diagrama de radiación es que no se normaliza a la unidad sinó una antena que radie uniformamente (de forma isotrópica) la misma potencia que la considerada. Por último:

**Definición.** La *directividad* es:

$$D_0 = \text{máx}[D(\theta, \varphi)] \tag{2}$$

## 6.6. Campos inducidos

Queremos estudiar los campos en las inmediaciones de la antena emisora. La aproximación que usaremos para tal fin será que $kr << 1$, por lo que operando las expresiones obtenidas anteriormente y estas relaciones, en el caso del dipolo obtendremos:

$$E_{ind} = -j\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \frac{1}{k} \frac{2\hat{r}\cos(\theta) + \hat{\theta}\sin(\theta)}{r^3}$$
$$H_{ind} = \frac{I_0 h}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \hat{\varphi}$$